PERIODICAL

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

60. BAND, 2. HEFT
MIT 3 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM JUNI 1956

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

60. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Hornfeck, B. Verallgemeinerte Primzahlsätze 93

Hornfeck, B. Dichtentheoretische Sätze der Primzahltheorie 96

Schmidt, W. Eine Verschärfung des Satzes von Minkowski-Hlawka 110

Carlitz, L. and **H. H. Corson.** Some Special Equations in a Finite Field . . 114

Leicht, J. Über die Mannigfaltigkeit der reduziblen quadratischen Formen 123

Florian A. Eine Ungleichung über konvexe Polyeder 130

Weier, J. Über Klassifizierung homotoper Abbildungen 157

Buchbesprechungen 168

Verallgemeinerte Primzahlsätze

Von

Bernhard Hornfeck, Berlin-Dahlen

(*Eingelangt am 12. Oktober 1955*)

Die vorliegende Note enthält einige kurze Bemerkungen zu Primzahluntersuchungen, die von den Herren *Knödel* und *Prachar* in den letzten Bänden dieser Zeitschrift veröffentlicht wurden[1].

Ist p die einzige Primzahl im Intervall $[p-d, p+d]$, $d>0$, so wollen wir sagen, p sei d-isoliert. Von Herrn *Sierpiński* [1] stammt der Satz, daß es d-isolierte Primzahlen zu jedem d gibt. Ein einfacher Beweis hierfür ergibt sich unter Ausnutzung der *Wilson*schen Kongruenz aus dem *Dirichlet*schen Primzahlsatz: Man wähle eine Primzahl $P \geqq d+2$; wegen $((P-1)!-1, P!) = 1$ gibt es also unendlich viele Primzahlen $p \equiv (P-1)!-1 \bmod P!$, $p \geqq P!$ und alle diese p sind d-isoliert.

Herr *Prachar* [2] zeigt u. a., daß sogar fast alle Primzahlen d-isoliert sind, d. h. daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 0 \tag{1}$$

für die Anzahl $N(x)$ aller nicht d-isolierten Primzahlen $\leqq x$ gilt (d fest[2]). Das folgt nämlich aus der *Brun*schen Abschätzung (s. a. *Landau* [3], Satz 88)

$$\sum_{\substack{p\leqq x\\ p\in\mathfrak{P}\\ p+n\in\mathfrak{P}}} 1 < c_1 \frac{x^2}{\log^2 x} \prod_{\substack{p\mid n\\ p\in\mathfrak{P}}} \left(1+\frac{1}{p}\right) \quad (\mathfrak{P} = \text{Menge aller Primzahlen}). \tag{2}$$

Diese Abschätzung gilt nun aber schon für jede Menge $\mathfrak{A}$ mit lediglich paarweise teilerfremden natürlichen Zahlen (s. [4]):

[1] Siehe Lit.-Verz. [2], [5], [8].

[2] Herr *Prachar* betrachtet noch von p abhängige $d = d(p)$; auch diese Überlegungen sind einer Satz 1 entsprechenden Verallgemeinerung fähig.

$$\sum_{\substack{a \leqq x \\ a \in \mathfrak{A} \\ a+n \in \mathfrak{A}}} 1 < c_2 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q \mid n \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q} \quad (\mathfrak{Q}=\text{Menge der quadratfreien natürl. Zahlen}). \tag{2'}$$

Damit beweist man den allgemeineren

Satz 1: *Besteht* $\mathfrak{A}$ *aus paarweise teilerfremden natürlichen Zahlen und ist*

$$A(x) = {}_{Df} \sum_{\substack{a \leqq x \\ a \in \mathfrak{A}}} 1 > c_3 \frac{x}{\log x}, \tag{3}$$

so sind zu vorgegebenem d *fast alle* $a \in \mathfrak{A}$ *d-isoliert.*

Denn die Anzahl $N(x)$ aller nicht d-isolierten $a \in \mathfrak{A}$, $a \leqq x$, ist nach (2') kleiner als

$$\sum_{n \leqq d} \left(c_2 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{\substack{q \mid n \\ q \in \mathfrak{Q}}} \frac{1}{q} \right) < c_4(d) \frac{x}{\log^2 x} .$$

Diese Verallgemeinerungsmöglichkeit auf Grund von (2') ist noch in weiteren Fällen gegeben. Herr *Prachar* [5] beweist, daß die Menge $\mathfrak{D}$ aller d, für die $p - p' = d$ in Primzahlen p, p' lösbar ist, positive asymptotische Dichte hat:

$$D(x) = {}_{Df} \sum_{\substack{d \leqq x \\ d \in \mathfrak{D}}} 1 > c_5 x.$$

Der Beweis dafür verläuft analog dem Beweis des Satzes, daß die *Schnirelmann*-Summe $\mathfrak{P}+\mathfrak{P}$ positive asymptotische Dichte hat (vgl. *Landau* [3], Sätze 89—91); eine Verallgemeinerung des letzteren findet sich in [6][3]; genau so erhält man

Satz 2: $\mathfrak{A}$ *erfülle die Voraussetzungen des Satzes 1. Dann gilt für die Menge* $\mathfrak{D}$ *aller* d, *für die* $d = a - a'$ *in Elementen* $a, a' \in \mathfrak{A}$ *lösbar ist,*

$$\varliminf_{x \to \infty} \frac{D(x)}{x} > 0. \tag{4}$$

Verallgemeinerungen im gleichen Sinne erlauben die von Herrn *Knödel* [7], [8] ausgesprochenen Sätze über die Häufigkeit von *Primzahl -k-tupeln*. Sie zeigen zugleich auch, daß Resultate dieser Art fast ausschließlich keine speziellen Aussagen über Primzahlen sind, sondern allgemein Eigenschaften von Mengen beschreiben, die eine „Zwillingsbedingung" (2') oder eine analoge Bedingung für k-tupel erfüllen und

[3] Sie beruht darauf, daß (2') an Stelle von (2) benutzt wird.

deren Anzahlfunktionen die Größenordnung $\frac{x}{\log x}$ haben. Beispielsweise gilt für den Fall $k = 2$ über den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ (*Knödel* [7], [8]) hinaus

Satz 3: $\mathfrak{A}$ *erfülle die Voraussetzungen von Satz 1. Dann gibt es für alle* $x > c_6$

$$\omega(x) > c_7 \frac{\log x}{\log \log \log x} \tag{5}$$

natürliche Zahlen $d < c_8 \log x$, *für die*

$$\sum_{\substack{a \leqq x \\ a \in \mathfrak{A} \\ a+d \in \mathfrak{A}}} 1 > c_9 \frac{x}{\log^2 x} \tag{6}$$

ist.

Literatur

[1] *Sierpiński, W.*: Remarque sur la répartition des nombres premiers. Colloquium Math. **1**, 193—194 (1948).

[2] *Prachar, K.*: Über ein Resultat von A. Walfisz. Monatsh. Math. **58**, 114—116 (1954).

[3] *Landau, E.*: Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. Cambridge Tracts **35** (1937).

[4] *Hornfeck, B.*: Zur Struktur gewisser Primzahlsätze. Journ. f. reine u. angew. Math. 1956 (im Druck).

[5] *Prachar, K.*: Über Primzahldifferenzen. Monatsh. Math. **56**, 304—306 (1952).

[6] *Hornfeck, B.*: Basen mit paarweise teilerfremden Elementen. Arch. d. Math. 1956 (im Druck).

[7] *Knödel, W.*: Ein Satz über Primzahlen. Österr. Akad. Wiss., Sitzungsberichte d. math.-nat. Klasse, Nr. **5**, 112—116 (1949).

[8] *Knödel, W.*: Sätze über Primzahlen. Monatsh. f. Math. **55**, 62—75 (1951).

Dichtentheoretische Sätze der Primzahltheorie

Von

Bernhard Hornfeck, Berlin-Dahlem

(*Eingelangt am 12. Oktober 1955*)

Von *Landau* [1] (s. a. *Landau* [2], § 56) stammt der Satz, daß die Anzahl $(P^k)(x)$ aller aus k (nicht notwendig verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzten natürlichen Zahlen $n \leqq x$ asymptotisch gleich $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ $(x \to \infty)$ ist. Man kann dieses Ergebnis als eine dichtentheoretische Aussage über das *k-fache Komplexprodukt* der Primzahlmenge $\mathfrak{P} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$[1] mit sich selbst auffassen und wird so zu der Frage geführt, ob der angegebene Satz nicht eine allgemeinere Formulierung im Rahmen einer *Dichte*theorie zuläßt. Dies ist der Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen.

Zunächst betrachten wir Mengen $\mathfrak{M}$ nicht negativer ganzer Zahlen, die wir durchweg mit großen deutschen Buchstaben bezeichnen; für ihre Anzahlfunktionen, d. h. die Anzahl der $m \in \mathfrak{M}$, $0 < m \leqq x$, wählen wir die entsprechenden großen lateinischen Buchstaben: $\sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ 0<m\leqq x}} 1 = M(x)$. Wir wollen diese Mengen von einem vorwiegend metrischen Standpunkt aus beschreiben und tun dies mit den von Herrn *Ostmann* [3] (vgl. a. *Stöhr* [4]) eingeführten *charakteristischen* $\varphi(x)$*-Dichten*: $\varphi(x)$ sei eine von einer Stelle an erklärte positive reelle Funktion, die mit x gegen $+\infty$ geht; wir sagen dann, daß die (*asymptotische*) $\varphi(x)$*-Dichte charakteristisch* für $\mathfrak{M}$ ist und den Wert τ hat, wenn $0 < \varliminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\varphi(x)} = \tau < \infty$ ist; existiert $\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\varphi(x)} = \tau > 0, \tau < \infty$, so sprechen wir von einer *charakteristischen natürlichen* $\varphi(x)$*-Dichte* der Menge $\mathfrak{M}$. Unter dem *Produkt* zweier Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ schließlich verstehen wir in Analogie zur *Schnirelmann*-Summe $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ die Menge aller möglichen Produkte

[1] Die 1 wollen wir mit zu den Primzahlen rechnen.

aus zwei Faktoren, deren erster aus $\mathfrak{M}_1$ und deren zweiter aus $\mathfrak{M}_2$ stammt; analog erklären wir $\mathfrak{M}_1 . \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_k = {}_{Df} \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i$ und setzen $\mathfrak{M} . \mathfrak{M} = {}_{Df} \mathfrak{M}^2$ usw. (vgl. a. *Raikov* [5]).

Mit diesen Begriffsbildungen läßt sich unsere Fragestellung sehr allgemein formulieren: Gegeben zwei Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit charakteristischen natürlichen $\varphi_1(x)$ – bzw. $\varphi_2(x)$-Dichten; die natürliche $\psi(x)$-Dichte sei charakteristisch für $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2$; wie hängt $\psi(x)$ mit $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zusammen?

In § 1 werden wir nun durch Angabe eines Beispiels zeigen, daß $\psi(x)$ sich nicht allgemein in Abhängigkeit von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ darstellen läßt; um so mehr wäre das der Fall, wenn man von den $\mathfrak{M}_i$ nur charakteristische *asymptotische* $\varphi_i(x)$-Dichten ($i = 1, 2$) vorgegeben hätte. Hierzu bedenke man, daß etwa für die Menge $\mathfrak{Z}^{(2)} = \{0, 1, 4, 9, \ldots\}$ aller Quadratzahlen[2] $\mathfrak{Z}^{(2)} \cdot \mathfrak{Z}^{(2)} = \mathfrak{Z}^{(2)}$ gilt; in diesem Falle ist also $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \psi(x) = \sqrt{x}$ wählbar; im Gegensatz dazu läßt sich für eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ der Primzahlmenge, die wie $\mathfrak{Z}^{(2)}$ charakteristische natürliche $\sqrt{x}$-Dichte haben soll, die natürliche $\sqrt{x} \log x$-Dichte als charakteristisch für $\mathfrak{A}^2$ errechnen (s. u., § 1). Man kann nun leicht eine Menge $\mathfrak{B}$ stückweise aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}^{(2)}$ zusammensetzen, so daß die Anzahlfunktion von $\mathfrak{B}^2$ zwischen den Größenordnungen $\sqrt{x}$ und $\sqrt{x} \log x$ hin und her pendelt. Diese Betrachtungen bilden in gewisser Weise ein Analogon zu Genauigkeitsabschätzungen, die Herr *Stöhr* [4] über die Dichte von *Summen*mengen bei vorgegebenen $\varphi_i(x)$-Dichten (für den Fall $\varphi_i(x) = o(x)$) der Summanden gewonnen hat.

Die Einengung unserer Fragestellung, die sich nun als notwendig erweist, wird uns in § 2 zur Behandlung einiger Sonderfälle der Primzahltheorie Anlaß geben. So beweisen wir etwa in Verallgemeinerung des eingangs zitierten *Landau*schen Satzes den Satz 3: *Ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge der Primzahlmenge mit der natürlichen $\dfrac{x}{\log x}$ — Dichte τ, so hat $\mathfrak{T}^k$ die $\dfrac{1}{(k-1)!} \cdot \dfrac{x(\log\log)^{k-1}}{\log x}$ — Dichte τ^k.* Ähnlich ist der Inhalt von Satz 4: *Sind $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_k$ elementefremde Teilmengen von $\mathfrak{P}$, deren natürliche $\dfrac{x}{\log x}$-Dichten existieren und die Werte $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ haben,*

[2] $\mathfrak{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ sei die Menge aller nicht negativen ganzen Zahlen, $\mathfrak{Z}^{(k)}$ die Menge ihrer k-ten Potenzen: $\{0, 1, 2^k, 3^k, \ldots\}$ ($k > 0$, ganz).

so hat $\prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{T}_\lambda$ die $k \cdot \dfrac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$-*Dichte* $\prod_{\lambda=1}^{k} \tau_\lambda$. Anschließend finden wir noch eine notwendige Bedingung für sogenannte *multiplikative Basen* endlicher Ordnung.

In § 3 machen wir noch einige allgemeinere Aussagen für den Fall, daß die natürlichen $\dfrac{x}{\log x}$-Dichten der $\mathfrak{T}_i$ nicht existieren und erweitern unsere Betrachtungen auf Mengen $\mathfrak{A}_i$, die lediglich aus zueinander *paarweise teilerfremden Elementen* bestehen. Hierüber beweisen wir zuletzt Satz 7; er verallgemeinert die Ergebnisse der Sätze 3 und 4 auf Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i$ mit paarweise teilerfremden Elementen:

1. *Hat* $\mathfrak{A}$ *die natürliche* $\dfrac{x}{\log x}$-*Dichte* τ, *so hat* $\mathfrak{A}^k$ *die*

$$\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\text{-Dichte } \tau^k.$$

2. *Haben die* $\mathfrak{A}_i$ *die* $\dfrac{x}{\log x}$ - *Dichten* τ_i *und ist* $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = 0 (\ i \neq j)$, *so hat* $\prod_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i$ *die* $k \cdot \dfrac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$-*Dichte* $\prod_{i=1}^{k} \tau_\lambda$.

Schließlich gilt für die Anzahlfunktion $N(x)$ von $\prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{A}_\lambda$ immer

3. $$N(x) \leqq \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} + o\left(\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right) (x \to \infty).$$

Zum Schluß stellt sich also noch heraus, daß bei unseren Untersuchungen über Primzahlteilungen neben Dichtestrukturen nur die Eigenschaft der Primzahlmenge wesentlich war, daß sie aus paarweise teilerfremden Elementen besteht. Es erschien aber aus methodischen Gründen zweckmäßig, mit dem Beweis der Sätze 3 und 4 den Kern des Beweises zu Satz 7 vorwegzunehmen; die Verallgemeinerungsmöglichkeit ergibt sich dann auf Grund eines Lemmas in § 3, das einen Einblick in die Struktur der in Satz 7 behandelten Produktmengen gewährt und mit den schon bereitgestellten Methoden bewiesen werden kann.

§ 1

$\mathfrak{A}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$, die natürliche $\sqrt{x}$-Dichte sei charakteristisch für $\mathfrak{A}$ und habe der Einfachheit halber den Wert 1; wir wollen

zeigen, daß die natürliche $\sqrt{x}\log x$-Dichte charakteristisch für $\mathfrak{A}^2 = {}_{Df}\mathfrak{M}$ ist und den Wert $1/4$ hat.

Offenbar wird in $\sum\limits_{\substack{a\in\mathfrak{A}\\ 0<a\leqq x}} A(x/a)$ jedes $m\in\mathfrak{M}$, $0<m\leqq x$, mit Ausnahme der Primzahlquadrate genau zweimal gezählt, so daß

$$M(x) = {}^1/_2 \sum_{\substack{a\in\mathfrak{A}\\ 0<a\leqq x}} A(x/a) + o(\sqrt{x}) \tag{1}$$

ist; alles Weitere ist eine asymptotische Abschätzung der rechter Hand stehenden Summe unter Benutzung der Voraussetzung $A(y)\sim\sqrt{y}$:

$$\sum_{\substack{a\in\mathfrak{A}\\ 0<a\leqq x}} A(x/a) = \int_{1/2}^{x} A(x/t)\,dA(t) = J. \tag{2}$$

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon>0$ bestimmen wir nun ein $x_0(\varepsilon)$, so daß für alle $x\geqq x_0(\varepsilon)$

$$1-\varepsilon \leqq \frac{A(x)}{\sqrt{x}} \leqq 1+\varepsilon$$

gilt. Dann ist

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} A(x/t)\,dA(t) + \int_{\frac{x}{x_0}}^{x} A(x/t)\,dA(t)$$

$$\leqq (1+\varepsilon)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \sqrt{\frac{x}{t}}\,dA(t) + \int_{\frac{x}{x_0}}^{x} A(x_0)\,dA(t)$$

$$= (1+\varepsilon)\left\{\sqrt{\frac{x}{t}}\,A(t)\Big|_{t=1/2}^{\frac{x}{x_0}} + \sqrt{x}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{A(t)}{t\sqrt{t}}\,dt\right\} + O(\sqrt{x})$$

$$= (1+\varepsilon)\frac{\sqrt{x}}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{A(t)}{t\sqrt{t}}\,dt + O(\sqrt{x}),$$

und entsprechend verläuft die Abschätzung

$$J \geqq (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{x}}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{A(t)}{t\sqrt{t}}\,dt + O(\sqrt{x})$$

nach unten. Wegen

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{A(t)}{t\sqrt{t}}\,dt \sim \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}\,dt \sim \log x$$

ergibt sich insgesamt

$$J \sim {}^1/_2 \sqrt{x} \log x \tag{3}$$

oder wegen (1) und (2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x} \log x} = {}^1/_4, \tag{4}$$

was wir zeigen wollten.

Das Wesentliche der Methode, mit der wir unsere allgemeine Frage zu behandeln hätten, wird an diesem Beispiel deutlich. Für gewöhnlich wird man aber mit der Angabe einer zu (1) analogen Beziehung Schwierigkeiten haben; in unserem Fall beruhte sie ja darauf, daß eine natürliche Zahl (abgesehen von der Reihenfolge) in nur einer Weise als Produkt von Primzahlen darstellbar ist, daß sozusagen $\mathfrak{M}$ das *direkte Produkt* $\mathfrak{A}^2$ ist. Da wir diese Eigenschaft immer wieder benötigen, werden wir uns in der Folge zunächst mit Produkten von Primzahlteilmengen beschäftigen. Zu (1) analoge Beziehungen lassen sich dann vor allem in zwei Fällen aufstellen:

I. Wenn $\mathfrak{T}^2$ *oder allgemein* $\mathfrak{T}^k (\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P})$,

II. Wenn $\prod_{\lambda=1}^{k} \mathfrak{T}_\lambda$ mit $\mathfrak{T}_i \cap \mathfrak{T}_j = 0\ (i \neq j)$, $\mathfrak{T}_\lambda \subseteq \mathfrak{P}$,

betrachtet wird.

Bevor wir das tun, soll nur noch die eingangs beschriebene Menge $\mathfrak{B}$ konstruiert werden: Eine Folge natürlicher Zahlen x_i sei rekursiv bestimmt durch $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_i = [\zeta(x_{i+1})]$ $(i \geqq 1)$, wobei $\zeta(x)$ eine beliebige positive Funktion sei, die mit x sehr schwach gegen $+\infty$ geht, etwa $\zeta(x) = o(\log \log x)$. Setzen wir noch $(x_j, x_{j+1}] = \mathfrak{I}_j$, so läßt sich über

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{I}_{2n} \cap \mathfrak{Z}^{(2)}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{I}_{2n+1} \cap \mathfrak{A})$$

zweierlei aussagen:

1. $\mathfrak{B}$ hat charakteristische natürliche $\sqrt{x}$ - Dichte.
2. Für die Anzahlfunktion $D(x)$ der Menge $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{D}$ gilt

a) $c_1 \sqrt{x_{2n}} \log x_{2n} < D(x_{2n}) < c_2 \sqrt{x_{2n}} \log x_{2n}$,

b) $D(x_{2n+1}) < c_3 \sqrt{x_{2n+1}}\, \zeta(x_{2n+1})$.

1. ist evident. Die Abschätzung 2a) nach oben gilt, weil nach der für $\mathfrak{A}^2$ durchgeführten Rechnung offenbar schon für zwei beliebige Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit charakteristischen natürlichen $\sqrt{x}$ — Dichten $(M_1 M_2)(x) < c\sqrt{x}\log x$ ist (in diesem allgemeinen Fall könnten ja nur noch mehr als jeweils zwei Produkte zusammenfallen). Für die Abschätzung 2a) nach unten bedenke man, daß $D(x_{2n})$ größer ist als die Menge der Produkte $b_i b_k \leqq x_{2n}$ mit $b_\lambda \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}_{2n-1} \subset \mathfrak{B}$, also

$$D(x_{2n}) > {}^1\!/_2 \sum_{\substack{a \in \mathfrak{A} \\ x_{2n-1} < a \leqq x_{2n}}} \left\{ A\left(\frac{x_{2n}}{a}\right) - A(x_{2n-1}) \right\}$$

$$> {}^1\!/_2 \int_{t=x_{2n-1}}^{x_{2n}} A\left(\frac{x_{2n}}{t}\right) dA(t) - A(x_{2n-1})\, A(x_{2n})$$

$$= {}^1\!/_2 \int_{t=x_{2n-1}}^{x_{2n}} A\left(\frac{x_{2n}}{t}\right) dA(t) + o(\sqrt{x_{2n}}\log x_{2n}) \quad (n \to \infty).$$

Das Integral berechnet man leicht nach dem schon durchgeführten Verfahren und erhält wegen $x_{2n-1} = o(\log\log x_{2n})$ $(n \to \infty)$ die Größenordnung $\sqrt{x_{2n}}\log x_{2n}$. Nach oben wird $D(x_{2n+1})$ abgeschätzt durch die Anzahl der Elemente $\leqq x_{2n+1}$ von $\mathfrak{B}'^2$, wobei $\mathfrak{B}' = [1, x_{2n}] \cup (\mathfrak{F}_{2n} \cap \mathfrak{Z}^{(2)})$ ist; 2b) ergibt sich dann aus $D(x_{2n+1}) < \sqrt{x_{2n+1}} + \sqrt{x_{2n+1}}\, x_{2n} + x_{2n}^2$.

Für $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{D}$ gilt also das in der Einleitung Gesagte.

§ 2

In den beschriebenen Fällen I und II wollen wir annehmen, daß die natürlichen $\dfrac{x}{\log x}$ - Dichten charakteristisch für $\mathfrak{T}$ bzw. die $\mathfrak{T}_\lambda$ seien; das ist ja in den Anwendungen, z. B. bei der Gesamtheit aller Primzahlen einer primen Restklasse, meist der Fall. Wir notieren lediglich noch den allgemeineren Inhalt des Beispiels zu Beginn von § 1 als

Satz 1: *Hat* $\mathfrak{A}$ *die natürliche* $x^{\frac{1}{m}}$ *- Dichte* α, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, *so hat* $\mathfrak{A}^2$ *die natürliche* $x^{\frac{1}{m}} \log x$ *- Dichte* $\dfrac{\alpha^2}{2m}$.

Wie schon erwähnt, ergibt sich noch sofort die

Folgerung: *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *zwei beliebige Mengen mit charakteristischen*

natürlichen $x^{\frac{1}{m}}$ *- Dichten* ($m \geqq 1$), *so ist*

$$(M_1 M_2)(x) = O(\sqrt[m]{x} \log x).$$

Bemerkung: Auf entsprechende Weise errechnet man noch leicht das allgemeinere Resultat, daß aus $M_1(x) < c_1 x^{\frac{1}{m}}$ und $M_2(x) < c_2 x^{\frac{1}{m}}$ folgt:

$$(M_1 M_2)(x) = O(\sqrt[m]{x} \log x).$$

Entsprechend Satz 1 gilt noch

Satz 2: *Haben die Mengen* $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, 2$) *die natürlichen* $x^{\frac{1}{m}}$ *- Dichten* α_i, $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{P}$, *und ist* $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 0$, *so hat* $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ *die natürliche* $x^{\frac{1}{m}} \log x$ *- Dichte* $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{m}$.

Unser Ziel ist jetzt (Fall I) der

Satz 3: $\mathfrak{T}$ *habe die natürliche* $\frac{x}{\log x}$ *- Dichte* τ, $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{P}$; *dann hat* $\mathfrak{T}^k$ die $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ - Dichte $\tau^k (\tau \geqq 0)$.

Der Beweis (vgl. hierzu auch *Landau* [2], § 56) erfolgt durch Induktion nach k; für $k = 1$ ist der Satz richtig; wir nehmen seine Gültigkeit für $k = \varrho$ an und zeigen, daß er auch für $k = \varrho + 1$ richtig ist. Wir setzen $\mathfrak{T} = \{t_0, t_1, \ldots\}$, $\mathfrak{T}^\lambda = \mathfrak{M}_\lambda$. Dann ist in Analogie zu (1)

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}}} M_\varrho(x/p) = (\varrho + 1) M_{\varrho+1}(x) - r(x),$$

wobei $0 \leqq r(x) < c\, S(x)$ ist, wenn wir unter $S(x)$ die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen $n \leqq x$ verstehen, die aus genau $(\varrho + 1)$ nicht notwendig verschiedenen Primfaktoren so zusammengesetzt sind, daß mindestens einer dieser Primfaktoren in höherer als erster Potenz auftritt. Nach *Landau* [2], § 56 ist

$$S(x) = o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x}\right)$$

also auch

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}}} M_\varrho(x/p) = (\varrho + 1) M_{\varrho+1}(x) + o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x}\right). \qquad (5)$$

Zur weiteren Behandlung der Summe linker Hand führen wir die Funktion

$$\vartheta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathfrak{T}}} \log p \qquad (\mathfrak{T} = \{t_0, t_1, \dots\}) \tag{6}$$

ein; wegen

$$\vartheta(x) = \int_{t_0 - 1/2}^{x} \log t \, dT(t) = T(t) \log t \,|_{t_0 - 1/2}^{x} - \int_{t_0 - 1/2}^{x} \frac{T(t)}{t} \, dt$$

und

$$T(t) = \tau \frac{t}{\log t} + o\left(\frac{t}{\log t}\right)$$

ist

$$\vartheta(x) = \tau x + o(x). \tag{7}$$

Damit wird unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathfrak{T}}} M_\varrho(x/p) &= \int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \, d\vartheta(t) + O(M_\varrho(x)) \\ &= \int_2^x \tau \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \, dt + \int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \, do(t) + o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Mit Hilfe der Induktionsannahme

$$M_\varrho(y) \sim \frac{\tau^\varrho}{(\varrho - 1)!} \cdot \frac{y(\log\log y)^{\varrho - 1}}{\log y} \qquad (y \to \infty) \tag{9}$$

liefert ferner eine kurze Rechnung nach dem Muster von §1

$$\int_2^x \tau \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \, dt \sim \frac{\tau^{\varrho+1}}{(\varrho - 1)!} \int_2^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log \frac{x}{t})^{\varrho - 1}}{t \log t \log \frac{x}{t}} \, dt \quad (x \to \infty), \tag{10}$$

wobei man mit der Substitution $\frac{x}{t} = u$ (vgl. a. *Landau* [2], § 56) noch

$$\int_2^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log \frac{x}{t})^{\varrho - 1}}{t \log t \log \frac{x}{t}} \, dt \sim \frac{\varrho + 1}{\varrho} \cdot \frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x} \qquad (x \to \infty)$$

erhält, so daß in (8)

$$\int_2^x \tau \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \, dt \sim (\varrho + 1) \frac{\tau^{\varrho+1}}{\varrho!} \cdot \frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x} \tag{11}$$

wird.

Beim zweiten Integral in (8) kann man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $x_0(\varepsilon)$ bestimmen, so daß $|o(t)| < \varepsilon t$ wird für $t \geqq x_0(\varepsilon)$; damit ergibt sich unter Berücksichtigung von (11) und wegen der Monotonie von $\frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}$ in t

$$\left| \int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, do(t) \right| = O(M_\varrho(x)) + \left| \int_{x_0}^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, do(t) \right|$$

$$= |O(M_\varrho(x))| + \left| \int_{x_0}^x |o(t)|\, d\, \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \right|$$

$$< \left| o\Big(\int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, dt \Big) \right| + \varepsilon \left| \int_{x_0}^x t\, d\, \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t} \right|$$

$$= \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, dt + \left| o\Big(\int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, dt \Big) \right| \qquad (x \to \infty),$$

und es folgt $(x \to \infty)$

$$\int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, do(t) = o\left(\int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, dt \right) = o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x} \right). \tag{12}$$

Auf Grund von (11) und (12) reduziert sich nun (8) zu

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}}} M_\varrho(x/p) \sim (\varrho + 1)\, \frac{\tau^{\varrho+1}}{\varrho!} \cdot \frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x} \qquad (x \to \infty);$$

das ist aber nach (5) die Behauptung.

Im Falle II erhält man den

Satz 4: *Haben die Mengen* $\mathfrak{T}_\lambda \subset \mathfrak{P}$ *die natürlichen* $\frac{x}{\log x}$*-Dichten* τ_λ *und ist* $\mathfrak{T}_i \cap \mathfrak{T}_j = 0$ $(i \neq j)$, *so hat* $\prod_{\lambda=1}^{\lambda} \mathfrak{T}_\lambda$ *die* $k \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$*-Dichte* $\prod_{\lambda=1}^{k} \tau_\lambda$.

Der Beweis verläuft wieder induktiv nach dem Vorbild des Beweises zu Satz 3; man setze $\prod_{i=1}^{\lambda} \mathfrak{T}_i = \mathfrak{M}_\lambda$; analog zu (5) gilt

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}_{\varrho+1}}} M_\varrho(x/p) = M_{\varrho+1}(x). \tag{5'}$$

Man führe

$$\vartheta_i(x) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}_i}} \log p = \tau_i\, x + o(x) \tag{6'}$$

ein; dann ergibt sich entsprechend wie im Beweis zu Satz 3

$$\sum_{\substack{p \leqq x \\ p \in \mathfrak{T}_{\varrho+1}}} M_\varrho(x/p) \sim \tau_{\varrho+1} \int_2^x \frac{M_\varrho(\frac{x}{t})}{\log t}\, dt \sim \varrho \prod_{\lambda=1}^{\varrho+1} \tau_\lambda \int_2^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log x\frac{x}{t})^{\varrho-1}}{t \log t \log \frac{x}{t}}\, dt$$

$$\sim (\varrho+1) \prod_{\lambda=1}^{\varrho+1} \tau_\lambda \cdot \frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x} \qquad (x \to \infty), \tag{13}$$

was wieder in Verbindung mit (5') die Behauptung beweist.

Eine ähnliche Rechnung liefert

Satz 5: *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine beliebige Menge mit* $M(x) = O(\frac{x}{\log x})$, *etwa* $M(x) < \mu \frac{x}{\log x}$, *so ist* $(M^k)(x) = O\left(\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right) = o(x)$.

Beweis: Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig, sie sei bereits bewiesen für $k = \varrho$, und wir zeigen ihre Gültigkeit für $k = \varrho + 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
(M^{\varrho+1})(x) &< \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ 0 < m \leqq x}} (M^\varrho)(x/m) \\
&= \int_2^x (M^\varrho)(x/t)\, dM(t) + O((M^\varrho)(x)) \\
&= \int_2^{\frac{x}{x_0}} (M^\varrho)(x/t)\, dM(t) + O((M^\varrho)(x)) \\
&= \int_2^{\frac{x}{x_0}} \frac{(M^\varrho)(\frac{x}{t})}{\log t}\, d\vartheta(t) + o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x}\right),
\end{aligned}$$

wobei $\vartheta(x) = \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M} \\ 0 < m \leqq x}} \log m < \mu\, x$ gesetzt wurde. Man hat weiter

$$\int_2^{\frac{x}{x_0}} \frac{(M^\varrho)(\frac{x}{t})}{\log t}\, d\vartheta(t) = \vartheta(t) \frac{(M^\varrho)(\frac{x}{t})}{\log t} \Big|_2^{\frac{x}{x_0}} - \int_2^{\frac{x}{x_0}} \vartheta(t)\, d \frac{(M^\varrho)(\frac{x}{t})}{\log t}$$

$$= o\left(\frac{x(\log\log x)^\varrho}{\log x}\right) - \mu \int_2^{\frac{x}{x_0}} t\, d \frac{(M^\varrho)(\frac{x}{t})}{\log t}$$

Das letzte Integral kam schon in ähnlicher Form vor, und wir erhalten insgesamt

$$(M^{\varrho+1})(x) < c\mu \frac{x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x} + o\left(\frac{(x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x}\right),$$

was zu zeigen war.

Nennt man nun nach Herrn *Raikov* [5] eine Menge $\mathfrak{M}$ *multiplikative Basis k-ter Ordnung* von $\mathfrak{Z}$, wenn $\mathfrak{M}^k = \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{M}^{k-1} \subset \mathfrak{Z}$ ist, so ergibt sich aus Satz 5 als notwendige Bedingung für multiplikative Basen $\mathfrak{M}$ der Ordnung k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{\frac{x}{\log x}} = \infty;$$

Herr *Raikov* beweist eine andere notwendige Bedingung, nämlich

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{M(x)}{\frac{x}{\log x}\log^{\frac{1}{k}} x} \geqq \Gamma(1/k) > 0.$$

Etwa für $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}$ ergibt sich aus Satz 3 der eingangs zitierte *Landau*sche Satz; wählt man $\mathfrak{T} = \underset{p\in\mathfrak{P}}{\in}[p \equiv 1(n)]$, so ist die Anzahl aller $m \in \mathfrak{M} = \mathfrak{T}^k$, $m \leqq x$, asymptotisch gleich $\frac{1}{\varphi(n)^k} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ usw.; ähnliche Ergebnisse faßt Satz 4 zusammen.

§ 3

Es war im wesentlichen das Ziel der bisher durchgeführten Überlegungen, die genauen Dichten gewisser Produktmengen anzugeben. Sind von den Teilmengen $\mathfrak{T}_i \subseteq \mathfrak{P}$ nur die schwächeren Voraussetzungen

$$c_1 \frac{x}{\log x} < T_i(x) < c_2 \frac{x}{\log x}, \tag{14}$$

d. h. also $\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{T_i(x)}{\frac{x}{\log x}} > 0$ [3], erfüllt, so liefern gleichartige Rechnungen (vgl. hierzu [6]) den

Satz 6: *$\mathfrak{T}_i$ seien Primzahlteilmengen, für die die Bedingungen* (14) *erfüllt sind. Dann gilt für* $\mathfrak{M} = \underset{\lambda=1}{\overset{k}{\Pi}} \mathfrak{T}_\lambda$

[3] Denn die rechte Seite von (14) gilt immer.

$$c\,\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} < M(x) < c'\,\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}, \tag{15}$$

und diese Aussage ist sogar dann noch richtig, wenn die $\mathfrak{T}_i$ *lediglich aus paarweise zueinander teilerfremden Elementen (unter Beibehaltung der Voraussetzung* (14)) *bestehen.*

Im folgenden seien $\mathfrak{A}_i$ Mengen mit paarweise teilerfremden Elementen, $\mathfrak{T}_i$ die Teilmengen aller Primzahlen aus $\mathfrak{A}_i$. Wir betrachten $\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{A}_i = {}_{Df}\,\mathfrak{N} = {}_{Df}\prod_{i=1}^{k}\mathfrak{T}_i \cup \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}' \cap \prod_{i=1}^{k}\mathfrak{T}_i = 0$, und beweisen über $N'(x)$ das Lemma:

$$N'(x) = o\left(\frac{x\,(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right). \tag{16}$$

Beweis: Wir führen einen Induktionsbeweis nach k; für $k = 1$ ist die Behauptung richtig, denn die Anzahl $A'(x)$ der Nichtprimzahlen $\leqq x$ aus $\mathfrak{A}_i$ ist, wie man leicht sieht, ein $o(\sqrt{x})$ (vgl. hierzu auch [6]). Die Behauptung sei ferner richtig für $k = \varrho$ und werde bewiesen für $k = \varrho + 1$.

Wir setzen $\prod_{i=1}^{\varrho+1}\mathfrak{A}_i = {}_{Df}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{N}\cdot\mathfrak{A}_{\varrho+1}, \prod_{i=1}^{\varrho}\mathfrak{T}_i = {}_{Df}\,\mathfrak{T}$. Dann ist ($\mathfrak{L}' \cap \prod_{i=1}^{\varrho+1}\mathfrak{T}_i = 0$)

$$\mathfrak{L} = \prod_{i=1}^{\varrho+1}\mathfrak{T}_i \cup \mathfrak{L}' = \mathfrak{N}\mathfrak{A}_{\varrho+1} = (\mathfrak{T}\cup\mathfrak{N}')\cdot(\mathfrak{T}_{\varrho+1}\cup\mathfrak{A}'_{\varrho+1})$$
$$= \prod_{i=1}^{\varrho+1}\mathfrak{T}_i \cup (\mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{T}_{\varrho+1}\cup\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{A}'_{\varrho+1}\cup\mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{A}'_{\varrho+1}),$$

und anstatt $L'(x) = o\left(\frac{x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x}\right)$ zu zeigen, genügt es, diese Abschätzung für $\mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{T}_{\varrho+1}$, $\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{A}'_{\varrho+1}$ und $\mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{A}'_{\varrho+1}$ einzeln herzuleiten.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $N'(x) = o\left(\frac{x(\log\log x)^{\varrho-1}}{\log x}\right)$. Sei $\mathfrak{N}'\cdot\mathfrak{T}_{\varrho+1} = \mathfrak{D}$. Dann ist ($x\to\infty$)

$$D(x) \leqq \sum_{p\in\mathfrak{T}_{\varrho+1}}^{p\leqq x} N'(x/p)$$
$$= \int_{t=1/2}^{x} N'(x/t)\,dT_{\varrho+1}(t). \tag{17}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $x_0(\varepsilon)$ so finden, daß $N'(x) < \varepsilon\,\frac{x(\log\log x)^{\varrho-1}}{\log x}$ ist für alle $x \geq x_0(\varepsilon)$, so daß

$$\int_{t=\frac{1}{2}}^{x} N'(x/t)\, dT_{\varrho+1}(t) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} + \int_{\frac{x}{x_0}}^{x} < \varepsilon \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log\frac{x}{t})^{\varrho-1}}{t\log\frac{x}{t}}\, dT_{\varrho+1}(t) + O(1) \tag{18}$$

wird. Das Integral

$$\int_{t=\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log\frac{x}{t})^{\varrho-1}}{t\log\frac{x}{t}}\, dT_{\varrho+1}(t) = \int_{t=\frac{1}{2}}^{\frac{x}{x_0}} \frac{x(\log\log\frac{x}{t})^{\varrho-1}}{t\log\frac{x}{t}\log t}\, d\vartheta_{\varrho+1}(t)$$

kam in ähnlicher Form schon im Beweis von Satz 3 vor; es ist ein $O\left(\frac{(x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x}\right)$. Aus (17) und (18) folgt also

$$D(x) < \varepsilon \frac{x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x} + o(1)$$

oder

$$D(x) = o\left(\frac{x(\log\log x)^{\varrho}}{\log x}\right). \tag{19}$$

Analog ergibt sich die Abschätzung (19) für $\mathfrak{T}.\mathfrak{A}'_{\varrho+1}$ und $\mathfrak{N}'.\mathfrak{A}'_{\varrho+1}$, womit das Lemma bewiesen ist.

Eine Zerlegung von $\overset{k}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} \mathfrak{A}_\lambda$ in die elementefremden Teilmengen $\overset{k}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} \mathfrak{T}_\lambda$ und $\mathfrak{N}'$ liefert nun unter Anwendung des Lemmas und unter Berücksichtigung von $T(x) \leqq (P^k)(x)$ den zusammenfassenden

Satz 7: 1. $\mathfrak{A}$ *bestehe aus paarweise teilerfremden Elementen und habe die natürliche* $\frac{x}{\log x}$ *- Dichte* τ. *Dann hat* $\mathfrak{A}^k$ *die natürliche* $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ *- Dichte* τ^k.

2. *Die* $\mathfrak{A}_i$ *seien Mengen mit paarweise teilerfremden Elementen, ihre natürlichen* $\frac{x}{\log x}$ *- Dichten seien* τ_i, *und es sei* $\mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = 0$ $(i \neq j)$; *dann hat* $\overset{k}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} \mathfrak{A}_\lambda$ *die* $k \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}$ *- Dichte* $\overset{k}{\underset{\lambda=1}{\Pi}} \tau_\lambda$.

3. *Für beliebige Mengen* $\mathfrak{A}_i$ *mit paarweise teilerfremden Elementen gilt immer*

$$N(x) = {}_{Df}(\overset{k}{\underset{i=1}{\Pi}} A_i)(x) \leqq \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x} + o\left(\frac{x(\log\log x)^{k-1}}{\log x}\right).$$

Literatur

[1] *Landau, E.:* Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers. Bull. de la Soc. math. de France, **28**, 25—38 (1900).
[2] *Landau, E.:* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I. (1909).
[3] *Ostmann, H.:* Additive Zahlentheorie I. Ergebnisbericht, Springer-Verlag.
[4] *Stöhr, A.:* Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie II. Eine Modifikation des Dichtebegriffs. Journ. f. reine u. ang. Math. **190**, 199—230 (1952).
[5] *Raikov, D.:* On multiplicative bases for the natural series. Rec. math. Moscou (2) **3**, 569—576 (1938).
[6] *Hornfeck, B.:* Zur Struktur gewisser Primzahlsätze. Journ. f. reine u. ang. Math. 1956 (im Druck).

Eine Verschärfung des Satzes von Minkowski-Hlawka

Von

Wolfgang Schmidt, Wien

(*Eingelangt am 26. Oktober 1955*)

§ 1

E. Hlawka[1] bewies den folgenden Satz: Ist S eine Jordan-meßbare Menge, die den Ursprung nicht enthält, und $V(S) < 1$, dann gibt es ein Gitter mit Determinante 1, welches mit S keinen Punkt gemeinsam hat. Andere Beweise wurden seither u. a. von *C. L. Siegel*[2], *C. A. Rogers*[3] gegeben. Inzwischen konnte *Rogers* den Satz so verbessern, daß er für $V(S) < a_n$ gilt[4], wobei $\lim_{n\to\infty} a_n = {}^4/_3$, ich vor kurzem[5] mit $V(S) < b_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 1{,}709\ldots$ Eben hat *Rogers* ein Ergebnis für $V(S) < c_n$ bewiesen, wobei c_n sich bei großen n so wie ${}^1/_3\sqrt{n}$ verhält.

Obgleich das Ergebnis: Es gibt ein Gitter mit Determinante 1, welches mit S keinen Punkt gemeinsam hat, wenn nur $V(S) < \dfrac{2}{(1+2^{1-n})\,(1+3^{1-n})}$ viel schlechter ist als die Schranke von *Rogers*, bringe ich es deshalb, weil es für kleine n möglicherweise besser ist, weil der Beweis einfach und vielleicht eine Kombination mit den Methoden von Rogers zu weiteren Verbesserungen führen kann. Wer die vorhergehende Arbeit kennt, wird bemerken, daß man mit der vorliegenden Methode auch zu leicht besseren Resultaten gelangt, doch wird der Prozeß kompliziert und mir ging es mehr darum, einen Weg, als ein Ziel zu zeigen, da die endgültigen Schranken kaum auf diesem Weg gewonnen werden können.

---

[1] *E. Hlawka*, Math. Ztschr. **49** (Berlin 43/44), 285—312.
[2] *C. L. Siegel*, Annales **46** (1945), 340—347.
[3] *C. A. Rogers*, J. London math. Soc. **26** (1951), 307.
[4] Erscheint demnächst in Transactions of the Royal Soc.
[5] Monatshefte f. Math. **60**, 1—10 (1956).

§ 2

Γ^0 sei das natürliche Gitter, mit Γ, $\overline{\Gamma}$ sollen Untergitter von Γ^0 bezeichnet werden. Gitterpunkte seien mit $G, H, P, \ldots$ bezeichnet. $G(g_1, g_2, g_3, \ldots g_n)$ seien die Koordinaten von G. Offenbar sind die g_i ganz, falls $G \varepsilon \Gamma^0$. $G \equiv H (\mathrm{mod}\ m)$ soll $g_i \equiv h_i (\mathrm{mod}\ m)$ bedeuten. O sei der Ursprung, o die leere Menge. Jeden Punkt $G \varepsilon \Gamma$ kann man $G = t(G)\, \overline{G}$ darstellen, wobei $t(G)$ natürlich, $\overline{G}$ primitiv in Γ. (D. h. auf der Strecke $\overline{O\overline{G}}$ ist kein weiterer Punkt von Γ.) Seien r, s natürlich, r ein Teiler von $s (r/s)$. Unter (Γ, r, s) soll die Menge jener $G \varepsilon \Gamma$ verstanden werden, für die r der größte Teiler von s, so daß $t(G) \equiv O (\mathrm{mod}\ r)$ gilt.

$$N(\Gamma, r, s) = N \cap (\Gamma, r, s); (\Gamma^0, r, s) = (r, s); N(\Gamma^0 r, s) = N(r, s)$$

Offenbar ist $\underset{r/s}{U}(\Gamma, r, s) = \Gamma$.

§ 3

Hilfssatz 1. Sei N eine Teilmenge von Γ^0. Es gelte $N = N(1, 2)$; $z(N) < 3$. (Dabei soll $z(M)$ die Zahl der Elemente von M angeben, wenn M eine endliche Menge ist.) Dann gibt es ein $\Gamma \subset \Gamma^0$ mit $d(\Gamma) = 2$, $\Gamma \cap N = o$. [$d(\Gamma) =$ Determ.(Γ)] Beweis: Es genügt, die Punkte modulo 2 zu betrachten. Ist OBdA. $N = \{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0)\}$ so wähle ich das Gitter mit der Basis

$$\{(2, 0, \ldots, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0), \mathrm{E}_3, E_4, \ldots, E_n\}.$$

Dabei bedeutet E_k den k-ten Einheitsvektor.

Hilfssatz 2. Sei wieder N eine Teilmenge von Γ^0, $N = N(1, 6)$ $z(N) < 12$. Dann gibt es ein Gitter $\Gamma \subset \Gamma^0$ mit $d(\Gamma) = 6$, $\Gamma \cap N = o$.

Beweis: Sei $G \in (1, 3)$, $H \in (1, 3)$. Dann bezeichnen wir $\mathrm{G} \sim H$, falls entweder $G \equiv H$ (mod 3) oder $\mathrm{G} \equiv 2H$ (mod 3). Werfen wir alle G_i mit $G_i \sim H$ in eine Klasse, so gibt es genau $\dfrac{3^n - 1}{2}$ Klassen. Da $z(N) < 12$, ist für $n > 2$ eine Klasse leer. Diese sei oBdA. $(1, 0, 0, \ldots, 0.)$ Nun definiere ich die Zuordnung

$$U(G): G(g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n) \to U(G) = (g_2, g_3, \ldots, g_n).$$

Wegen der Wahl der bestimmten Klasse ist $U(N)$ im R_{n-1} wieder in $(1, 3)$. Dasselbe Verfahren setzen wir fort, bis wir auf eine Menge $U^{n-2}(N)$ kommen mit Elementen $(g_{n-1}, g_n) \in (1,3)$.

Im R_2 gibt es 4 Gitter Γ mit relativer Determinante 3, $\Gamma \subset \Gamma^0$. Zu jedem $G \in (1,3)$ gibt es bloß ein solches Gitter, welches G enthält. Da $z(U^{n-2}(N)) < 12$, gibt es daher ein Untergitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma^0$, welches weniger als 3 Punkte von $U^{n-2}(N)$ enthält. Dieses Gitter $\bar{\Gamma}$ habe die Basis B_1, B_2. Dann soll Γ^* das Gitter mit der Basis $B_1, B_2, E_3, \ldots, E_n$ sein. $d(\Gamma^*) = 3$, $z(\Gamma^* \cap N) < 3$. Da $N \subset (1,6)$ und $d(\Gamma^*) = 3$, liegt die Menge M dieser 3 Gitterpunkte in $(\Gamma^*, 1,2)$. Nun kann man Hilfssatz 1 anwenden und sieht, daß es ein Teilgitter $\Gamma \subset \Gamma^*$ gibt mit $\Gamma \cap M = o$, somit $\Gamma \cap N = o$. Dabei gilt $d(\Gamma) = 2d(\Gamma^*) = 6$. Hiemit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3: N sei eine Teilmenge von Γ^0. Es gelte

$$z(N(1,6)) + 3\, z(N(2,6)) + 4\, z(N(3,6)) + 12\, z(N(6,6)) < 12.$$

Dann gibt es ein $\Gamma \subset \Gamma^0$ mit $d(\Gamma) = 6$, $\Gamma \cap N = o$.

Beweis: Sei etwa G in $(2,6)$. $G(\bar{G}; \tilde{G}) = G(g_1, g_2; g_3, g_4, \ldots, g_n)$. Diesem G werden nun 3 Punkte P^i zugeordnet:

$$P^i(p^i{}_1, p^i{}_2; p^i{}_3, p^i{}_4, \ldots, p^i_n) = P^i(\bar{P}^i, \tilde{P}^i)\ (i = 1, 2, 3)$$

$$\tilde{P}^i = \tilde{G}^i \quad P^i \equiv G^i \pmod 3$$

$$\bar{P}^1 \equiv (1,0);\ \bar{P}^2 \equiv (0,1);\ \bar{P}^3 \equiv (1,1) \quad \text{(alle drei mod 2)}$$

Sonst seien die P^i willkürlich. Liegt nun $G \in \bar{\Gamma}$, wobei $d(\bar{\Gamma}) = 12$, $\bar{\Gamma} \subset \Gamma^0$, so gibt es ein P^i mit $P^i \in \bar{\Gamma}$, wie man leicht einsieht. (Man braucht bloß jene Gitterpunkte zu betrachten, deren letzte $n - 2$ Koordinaten mit G übereinstimmen.)

Also ist der Punkt $G \in (2,6)$ nicht mehr „wert" als drei Punkte aus $(1,6)$, wie sie P^1, P^2, P^3 darstellen. Ebenso ist ein Punkt $G \in (3,6)$ nicht mehr wert als 4, $G \in (6,6)$ nicht mehr als 12 Gitterpunkte aus $(1,6)$. Daraus folgt Hilfssatz 3.

§ 4

Sei Γ ein Gitter mit $d(\Gamma) = 1$, $N(\Gamma) = \Gamma \cap S$. Dabei bedeutet S unsere Jordan-meßbare Menge. $N(\Gamma, r, s) = N(\Gamma) \cap (\Gamma r, s) = \Gamma(r, s) \cap S$. Soll es kein Teilgitter $\bar{\Gamma} \subset \Gamma$ mit $d(\bar{\Gamma}) = 6$ geben, welches mit N (also auch mit S) keinen Punkt gemeinsam hat, so muß sein

$$f(\Gamma) = z(N(\Gamma, 1,6)) + 3\, z(N(\Gamma, 2,6)) + 4\, z(N(\Gamma, 2,6)) + 12\, z(N(\Gamma, 6,6)) \geq 12.$$

Nach der *Siegel*schen Maßtheorie[2] hat man

$$\int_F z(N(\Gamma))\, d\omega = V(S) \qquad \int_F d\omega = 1$$

Daraus folgt

$$\int_F z(N(\Gamma, r, r))\, d\omega = \frac{1}{r^n}\, V(S)$$

Da nun

$(3,6)=(3,3)-(6,6)$; $(2,6)=(2,2)-(6,6)$; $(1,6)=(1,1)-(2,2)-(3,3)+(6,6)$

folgt weiter

$$\int_F f(\Gamma)\, d\omega = V(S)\left[1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{6^n}+3\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{6^n}\right)+4\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{6^n}\right)+12\cdot\frac{1}{6^n}\right] \geq 12$$

$$V(S) \geq \frac{12}{(1+2^{1-n})\,(1+3^{1-n})}$$

Soll es daher kein Gitter Γ mit $d(\Gamma)=1$, $\Gamma \cap S = o$ geben, so muß $V(S) \geq \frac{2}{(1+2^{1-n})\,(1+3^{1-n})}$ sein. Daraus folgt der Satz: Ist $V(S) < \frac{2}{(1+2^{1-n})\,(1+3^{1-n})}$, $O \notin S$, so gibt es ein Gitter Γ mit $d(\Gamma)=1$ und $\Gamma \cap S = o$.

Some Special Equations in a Finite Field

By

L. Carlitz and **H. H. Corson,** Durham, N. C., USA.

(Received October 31, 1955)

1. Introduction. The number of solutions $N = N(a_1, \ldots, a_r)$ of the equation

$$a_1 x_1^{m_1} + a_2 x_2^{m_2} + \ldots + a_r x_r^{m_r} = c \tag{1}$$

in the finite field $GF(q)$, $q = p^r$, has been the subject of several recent papers [1], [4], [7], [8], [10], [11], [14], [15]. In general it has only been possible to express N by complicated formulas, due to its dependence on the coefficients in (1), on the exponents m_i and on c. The present paper gives information on this dependence of N on the a_i for a fixed choice of m_i and c.

In particular let A be the average of N for fixed c and fixed m_i; then the variance of N with respect to the a_i is defined as

$$\Sigma \{N(a_1, \ldots, a_r) - A\}^2,$$

where the sum is over all non-zero a_i. When $c = 0$, Theorem 1 determines the variance as

$$\sum_{a_i \neq 0} (N - A)^2 = q^{r-2}(q-1)^{r-2} Z(1, \ldots, r),$$

where Z denotes a symmetric sum in the m_i and their least common multiples taken $2, \ldots, r$ at a time. Theorem 7 contains a similar result for the case $c \neq 0$.

The sum $Z(1, \ldots, r)$ is treated in §4. It is shown that Z is expressible as the number of solutions in roots of unity of a simple equation (11), and the m_i for which Z vanishes are thereby determined.

As an extension of these theorems the variance of $N(a_1, \ldots, a_r)$ with respect to non-zero a_i, where (1) is replaced by

$$a_1 f_1(u_1) + \ldots + a_r f_r(u_r) = c$$

is discussed in § 7 and similar but more complicated results are obtained. In addition some results concerning (1) are obtained in Theorems 5 and 6.

Most of the results of the present paper were stated without proof in [6].

2. The following lemma concerning the average of N will be used below.

Lemma. *If A_0 is the average of $N(a_1, \ldots, a_r)$ over all non-zero a_i in* (1) *with $c = 0$, and if A_1 is the average of $N(a_1, \ldots, a_r)$ over all non-zero a_i in* (1) *with $c = 1$, then*

$$A_0 = A_1 = q^{r-1}.$$

Proof. Let $c = 0$. We first find $S'(i_1, \ldots, i_k) = \Sigma' N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ where the prime indicates that the sum is over all a_i including zeros. Corresponding to each choice of the x_i, the number of a_i which satisfy (1) is seen to be q^{r-1} unless all $x_i = 0$. It follows that

$$S'(1, \ldots, r) = (q^r - 1)\, q^{r-1} + q^r. \tag{2}$$

If $S(i_1, \ldots, i_k) = \Sigma N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$ where the sum is over all $a_i \neq 0$, then

$$S'(1, \ldots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} S(i_1, \ldots, i_k)\, q^{r-k}. \tag{3}$$

The inner sum is over all r subscripts taken k at a time, and $S_{(0)} = 1$.

We will now use the known inversion relation that if

$$L'(1, \ldots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} L(i_1, \ldots, i_k) \tag{4}$$

then

$$L(1, \ldots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} (-1)^{r-k} L'(i_1, \ldots, i_k) \tag{4'}$$

and conversely. However, first note that

$$A_0 = (q-1)^r\, S(1, \ldots, r). \tag{5}$$

Now from (2), (3), (4) and (5) it follows that $A_0 = q^{r-1}$.

The same method can be used to find A_1.

3. In §§ 3, 4 and 5 we assume $c = 0$ in (1); and let the exponents $m_1, m_2, \ldots, m_r$ be positive integers which, it may be assumed, divide $q-1$. We define the following function:

$$\lambda(i_1, i_2, \ldots, i_k) = \frac{m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_k}}{[m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_k}]},$$

where the denominator is the l. c. m. of the m_{i_j}.

Theorem 1. *If* $c = 0$ *in equation* (1) *then the variance of*

$$N_0 = N(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

with respect to all non-zero a_i *is*

$$\sum_{a_i \neq 0} (N_0 - A_0)^2 = q^{r-2}(q-1)^{r+2} \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} \lambda(i_1, \ldots, i_k) = q^{r-2}(q-1)^{r+2} Z(1, \ldots, r).$$

The inner sum is over the r *indices taken* k *at a time, and* $\lambda(0) = 1$.

Proof. Using the lemma and (5), it remains only to find $\sum N_0^2$ summed over $a_i \neq 0$.

Consider the system

$$\begin{cases} a_1 x_1^{m_1} + \ldots + a_r x_r^{m_r} = 0 \\ a_1 y_1^{m_1} + \ldots + a_r y_r^{m_r} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

If $M(a_1, \ldots, a_i)$ is the number of solutions of (6), then $M = N_0^2$.

Treating (6) as a linear system in $a_1, \ldots, a_r$, $\sum M$ summed over all a_i follows if one knows the number H of matrices of the form

$$B = \begin{Vmatrix} x_1^{m_1} & \ldots & x_r^{m_r} \\ y_1^{m_1} & \ldots & y_r^{m_r} \end{Vmatrix}$$

which have rank 1. In fact we may write

$$\sum_{\text{all } a_i} M = \sum_{\text{all } a_i} N_0^2 = (q^{2r} - H - 1)\, q^{r-2} + Hq^{r-1} + q^r.$$

To find H notice that when $x_i = 0$, $y_i \neq 0$ then either the rank of B equals 2 or $x_j = 0$ for all j. For this reason it is only necessary to consider two cases: (1) $x_i = y_i = 0$ for some number of i between 1 and r, (2) the trivial case when $x_i = 0$ for all i or $y_i = 0$ for all i.

Under case (1) we need the non-zero solutions of

$$\frac{x_{i_1}^{m_{i_1}}}{y_{i_1}^{m_{i_1}}} = \frac{x_{i_2}^{m_{i_2}}}{y_{i_2}^{m_{i_2}}} = \ldots = \frac{x_{i_k}^{m_{i_k}}}{y_{i_k}^{m_{i_k}}} = \alpha, \tag{7}$$

where α is a new variable. α must be an $[m_{i_1} \ldots m_{i_k}]$ — *th* power and for each such α there are $(q-1)^k\, m_{i_1} \ldots m_{i_1}$ solutions of (7). Considering all possible k and case (2), we find

$$H = \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i)} (q-1)^{k+1} \lambda(i_1, \ldots, i_k) + 2(q^r - 1). \tag{8}$$

Let $T'(1, 2, \ldots r) = \Sigma' N_0^2(a_1, \ldots, a_k)$ summed over all a_i, and let $T(1, 2, \ldots, r) = N_0^2(a_1, \ldots, a_k)$ summed over $a_i \neq 0$. Similar to (3) is

$$T'(1, \ldots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} q^{2(r-k)} T(i_1, \ldots, i_k). \tag{9}$$

We may now apply (4), and the theorem follows by using (7) and (8) to determine $T'(i_1, \ldots, i_k) = \Sigma N_0^2(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$.

Corollary. *A necessary and sufficient condition that N_0, the number of solutions of* (1) *in $GF(q)$ with $c = 0$, be independent of $a_1, \ldots, a_r$ $(a_i \neq 0)$ is that*

$$Z(1, \ldots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} (-1)^{r-k} \lambda(i_1, \ldots, i_k) = 0.$$

4. Some values of the m_i for which Z vanishes are already known. Hua and Vandiver [11] have found N_0 as a function of q alone when all the m_i are prime in pairs, and Carlitz [4] has found N_0 as a function of q alone when one of the m_i is prime to all the rest. These results also follow from the corollary of § 3, as does the following theorem.

Theorem 2. *If an odd number s of the m_i, say $m_1, m_2, \ldots, m_s$, are each one prime to each of $m_{s+1}, \ldots, m_r$ and if $m_i = 2n_i (i = 1, \ldots, s)$ with $(n_i, n_j) = 1$, $i \neq j$, then $Z(1, \ldots, r) = 0$.*

Proof. First notice that if $m_1, \ldots, m_s$ are each one prime to each of $m_{s+1}, \ldots, m_r$, then

$$Z(1, \ldots, r) = Z(1, \ldots, s)\, Z(s + 1, \ldots, r). \tag{10}$$

Equation (10) may be verified by noting that

$$[m_1, \ldots, m_r] = [m_1, \ldots, m_s]\, [m_{s+1}, \ldots, m_r]$$

under the above assumption.

We may confine attention to $Z(1, \ldots, s)$. As $(n_i, n_j) = 1$ then $\lambda(i_1, \ldots, i_k) = 2^{k-1}$. Using the binomial expansion one finds

$$Z(1, \ldots, s) = {}^1/_2((2 - 1)^s + (-1)^s).$$

Therefore if s is odd, $Z = 0$.

Corollary. *The number of solutions of* (1) *with $c = 0$, and with the m_i restricted by the assumptions of Theorem* 2, *is*

$$N_0 = q^{r-1}.$$

The following discussion, and in particular Theorem 4, will establish that the above instances are the only ones where Z vanishes. However, first, for a more convenient method of computing Z we will need Theorem 3 which is a consequence of the following lemma.

Lemma. *The number of solutions of*

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = 1, \alpha_i^{m_i} = 1 \tag{11}$$

is $\lambda(1, \dots, r)$, *where* λ *means the same as in Theorem* 1.

Proof. The statement follows from (b) and (c) below. Since

$$\sum_{\alpha_1^{m_1}=1} \dots \sum_{\alpha_r^{m_r}=1} (\alpha_1 \dots \alpha t)^t = \begin{cases} m_1 \dots m_r ([m_1, \dots, m_r]/t), \\ 0 \qquad \text{(otherwise)} \end{cases} \tag{a}$$

then

$$\frac{1}{m_1 \dots m_r} \sum_{t=1}^{m_1 \dots m_r} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (\alpha_1 \dots \alpha_r)^t = \frac{m_1 \dots m_r}{[m_1 \dots m_r]}. \tag{b}$$

Also

$$\sum_{t=1}^{m} \alpha^t = \begin{cases} m \ (\alpha = 1) \\ 0 \ (\alpha \neq 0). \end{cases} \tag{c}$$

If we denote by $D'(1, \dots, r)$ the number of solutions of (11) and by $D(i_1 \dots i_k)$ the number of solutions of

$$\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = 1 \qquad (\alpha_i \neq 1)$$

then

$$D'(1, \dots, r) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} D(i_1, \dots, i_r), \qquad D(0) = 1$$

The following theorem can now be proved by applying (4).

Theorem 3. *Let* $Z(1, \dots, r)$ *be defined as in Theorem 1, and let* $D(1, \dots, r)$ *be the number of solutions of*

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r = 1, \alpha n_i^{m_i} = 1, \alpha \neq 1. \tag{12}$$

Then

$$Z(1, \dots, r) = D(1, \dots, r).$$

Theorem 3 implies that Z cannot vanish if there is a single solution of (12). That there will be at least one solution, except in the cases mentioned at the first of this section, is the substance of the following theorem.

Theorem 4. *Let* Q *be the set of* m_i, *the exponents in equation* (1). *A necessary and sufficient condition that* $Z(1, \dots, r) = 0$ *is that either* Q, *or a subset* R *of* Q *with each member of* R *prime to each member of* $Q - R$, *has one of the properties*:

(a) *one member of the set is prime to all other members,*

(*b*) *the set has an odd number of elements, and each element is of the form* $2g_i$ *with the* g_i *prime in pairs.*

The sufficiency follows from Theorem 2 and those results referred to preceding Theorem 2.

To prove the necessity we shall assume that neither (a) nor (b) is true for Q or any R as defined in the statement of the theorem. Some m_i^{th} root of unity must now be associated with α_i so that (12) is satisfied.

We consider two cases:

(I). All m_i are odd. Let $\epsilon(t)$ be a primitive t^{th} root of unity. Let t be a prime factor of $m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}$; then if k is even we give α_{i_1} a factor $\epsilon(t)$, α_{i_2} a factor $\epsilon^{-1}(t)$, and so on alternately. If k is odd, and as t is odd, we give α_{i_1} a factor $\epsilon^2(t)$, α_{i_2} and α_{i_3} a factor $\epsilon^{-1}(t)$. The remaining α_i are treated as in the case where k is even.

This process is repeated for each prime which is common to at least two of the m_i, and furthermore α_i is given no other factors than those determined by the above method. As (a) was assumed false, this determines a solution of (12). Therefore $Z \neq 0$.

(II). s of the m_i are even. For each odd prime t which is a factor of at least two of the m_i we let α_i have a factor $\epsilon(t)$, $\epsilon^{-1}(t)$, or $\epsilon^2(t)$ as in case I. As (a) is assumed false, each α_i corresponding to an odd m_i has a factor determined, and $\alpha_i \neq 1$.

Suppose $m_1, \ldots, m_s$ are the even m_i. If s is even we give α_1 a factor $\epsilon(2)$, α_2 a factor $\epsilon^{-1}(2)$, and so on alternately. If s is odd then as (b) is false either (i) m_i $(i \leq s)$ has a factor in common with some odd m_j, or (ii) $m_i = 2g_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ and at least two of the g_i have a factor in common.

(i) At least one $\alpha_k (1 \leq k \leq s)$ already has a factor defined. The even number of $\alpha_i (1 \leq i \leq s, i \neq k)$ we treat in the preceding paragraph assigning either $\epsilon(2)$ or $\epsilon^{-1}(2)$.

(ii) If at least two of the g_i have an odd factor in common then this case may be treated as in (i), since each odd common factor has been considered and dropping out one m_i leaves an even number. Suppose g_i and g_j have an even factor, then give α_i a factor $\epsilon(4)$, α_j a factor $\epsilon^{-1}(4)$. The $\alpha_i (1 \leq i \leq s, i \neq j)$ may again be treated as in (i).

These being all the possibilities, $Z \neq 0$.

It may be of interest to mention that a sum V similar to $Z(1, \ldots, r)$ has been treated in [2], [9], [13]. The sum V which represents the density of integers that are not divisible by $m_1, \ldots, m_r$ is not included in these results nor *vice versa*. However, it is possible to construct an equation of type (1) which has as its number of solutions a function of q and V.

5. The preceding results have suggested the following theorems. Theorem 5. *Let* $m_i = vs_i$ *in equation* (1) *with* $c = 0$ *where* $(s_i, s_j) = 1$, $i \neq j$, *and let* N_0 *be the number of solutions of this equation. Then* N_0 *equals the number of solutions of*

$$a_1 x_1^v + a_2 x_2^v + \ldots + a_r x_r^v = 0. \tag{13}$$

Proof. Define a, b, and c as follows:

$$as_1 + bs + c(q-1) = 1, \qquad (a, q-1) = 1,$$

where $s = s_2 \ldots s_r$. If x_1 is assumed not zero then the following is a transformation with an inverse:

$$x_1 = y_1^a,$$
$$x_i = y^{-b\, s/s_i}\, y \ (i = 2, \ldots, r).$$

(1) then assumes the following form:

$$a_1 y_1^v + a_2 y_2^{m_2} + \ldots + a_r y_r^{m_r} = 0. \tag{14}$$

However, any solution of (14) with $\lambda = 0$ is a solution of (13) with $x_i = 0$. The hypotheses of the theorem are still valid for (14), and m_2 may be reduced in the same way, etc.

One may prove by the same technique the following theorem.

Theorem 6. *In equation* (1) *with* $c = 0$ *let* $m_i = u_i v_i \ (i = 1, \ldots, r)$ *and assume* $(v_i, m_j) = 1$, $i \neq j$. *Then* N_0 *equals the number of solutions of*

$$a_1 x_1^{u_1} + a_2 x_2^{u_2} + \ldots + a_r x_r^{u_r} = 0.$$

To mention an application of Theorems 5 and 6 we suppose that q $q = p^n = p^{2n_1}$. If $m_i/(p^{n_1} + 1), i = 1, \ldots, r$, then N_0 is known [5], [8], [12]. We note then that in certain cases when $m_i \nmid (p^{n_1} + 1)$ one can adjust the exponents to meet this condition by using Theorem 5 or Theorem 6.

6. Assume that $c \neq 0$ in equation (1); there will be no loss of generality for our purpose in assuming $c = 1$. Following the same procedure used in section 3, one may prove the following analalogues of Theorem 1 and its corollary.

Theorem 7. *If* $N_1 = N(a_1 \ldots a_r)$, *the number of solutions of equation* (1) *with* $c = 1$, *then the variance of* N_1 *with respect all non-zero* a_i *is*

$$\sum_{a_i \neq 0} (N_1 - A_1)^2 = q^{r-2} (q-1)^r \left\{ q m_1 \ldots m_r - (q-1) \frac{m_1 \ldots m_r}{[m_1 \ldots m_r]} - 1 \right\} \tag{15}$$

with A_1 *defined as in section* 2.

Corollary. *For N_1 to be independent of $a_1, a_2, \ldots a_r$ $(a_i \neq 0)$, all m_i must be* 1.

One sees immediately that the expression in braces in (15) vanishes only when all $m_i = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ by noting that the coefficient of q as well as the coefficient of q^0 is always positive except in this case.

7. It is also possible to find the variance of the number of solutions of the following more general polynomial:

$$a_1 f_1(u) + a_2 f_2(v) + \ldots + a_r f_r(z) = c \tag{16}$$

where f_i is a polynomial in $GF(q)$ with variables $(x) = (x_1, \ldots, x_{i_1})$, and $s = i_1 + \ldots + i_r$. As the procedure is the same, we merely state the results.

Theorem 8. *If $N_0 = N(a_1, \ldots, a_r)$ is the number of solutions of* (16) *with $c = 0$ and A_0 the average of N_0, then the variance of N_0 over all non-zero a_i is*

$$\begin{aligned}\Sigma (N_0 - A_0)^2 &= q^{2s-2}(q^2 - 3q + 2) S_r\{(-1)^{r-k} q^{k-2(i_1+\ldots i_k)} \Pi_{i_k}^2\} \\ &- q^{2s-2}(q-1)^{2-r} S_r^2\{(-1)^{r-k} q^{k-(i_1+\ldots+i_k)} \Pi_{i_k}\} \\ &+ q^{2s-2}(q-1) S_r\{(-1)^{r-k} q^{k-2(i_1+\ldots+i_k)} S_{i_k}\{R(i_1, \ldots, i_j)\Pi_{i_k-i_j}^2\}\},\end{aligned} \tag{17}$$

where

$$S_r\{f(r, i_1, \ldots, i_k)\} = \sum_{k=0}^{r} \sum_{(i)} f(r, i_1, \ldots, i_k),$$

$$R(i_1, \ldots, i_k) = \sum_{\alpha \neq 0} \sum_{\beta_{i_j} \neq 0} N_{i_1}(\beta_{i_1}) N_{i_1}(\alpha\beta_{i_1}) \ldots N_{i_j}(\beta_{i_j}) N_{i_j}(\alpha\beta_{i_j}),$$

$$\Pi_{i_k} = N_{i_1}(0) \ldots N_{i_k}(0),\ \Pi_{i_k-i_j} = \Pi_{i_k}/\Pi_{i_j},$$

and $N_i(\beta)$ is the number of solutions of $f_i(x) = \beta$.

Theorem 9. *If N_1 is the number of solutions of* (16) *with $c = 1$ and A_1 is the average of N_1, then the variance of N_1 over all non-zero at is*

$$\begin{aligned}\Sigma (N_1 - A_2)^2 &= 2q^{2s-2}(q-1)^r S_r\{(-1)^{r-k} q^{k-(i_1+\ldots+i_k)} \Pi_{i_k}\} - \\ &- q^{2s-2}(q-1)^r S_r^2\{(-1)^{r-k} q^{k-(i_1+\ldots+i_k)} \Pi_{i_k}\} - \\ &- q^{2s-1} S_r\{(-1)^{r-k} q^{k-2(i_1+\ldots+i_k)} \Pi_{i_k}^2\} + \\ &+ q^{2s-2}(q-1) S_r\{(-1)^{r-k} S_{i_k}\{R'(i_1 \ldots i_j)\Pi_{i_k-i_j}\} q^{k-2(i_1+\ldots+i_k)}\}.\end{aligned}$$

$R'(i_1, \ldots, i_j)$ is the same as R in Theorem 8 except $\alpha = 1$ only.

We shall also state a special case of Theorem 8. Assume $N_i(\beta) = N_j(\beta)$ $(i = 1, \ldots, r)$ for all β in $GF(q)$. Under these conditions (17) may be written as

$$\begin{aligned}\Sigma\,(N_0 - A_0)^2 &= q^{2s-2}(q^2 - 3q + 2)\,(q^{1-2I}N^2(0) - 1)^r \\ &= q^{2s-2}(q-1)^{2-r}(q^{1-I}N(0) - 1)^{2r} \\ &= q^{2s-2}(q-1)\sum_{\alpha \neq 0}[(q^{1-4I}N^2(0) = q^{1-2I})\sum_{\beta \neq 0} N(\beta)\,N(\alpha\beta) + 1]^r\end{aligned}$$

where $i_1 = i_2 = \ldots = i_r = I$

We remark that the assumption $N_i(\beta) = N_j(\beta)$ implies that f_i and f_j are formally the same; see [3; Th. 4. 2].

References

1. *N. C. Ankeny*, Equations in finite fields, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 40 (1954), 1072—1073.

2. *F. A. Behrend*, Generalization of an inequality of Heilbronn and Rohrbach, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 681—684.

3. *L. Carlitz*, Invariantive theory of equations in a finite field, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 405—427.

4. *L. Carlitz*, The number of solutions of certain types of equations in a finite field, Pac. J. Math., vol. 5 (1955), 177—181.

5. *L. Carlitz*, The number of solutions of a particular equation in a finite field. Publicationes Mathematicae, to appear.

6. *L. Carlitz* and *H. H. Corson*, Some special equations in a finite field, Proc. Nat. Acad. Sci USA., vol. 41 (1955) 752—754.

7. *H. Davenport* ans *H. Hasse*, Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen, J. reine angew. *Math.* 172 (1935), 151—182.

8. *O. B. Faircloth*, On the number of solutions of some general types of equations in a finite field, Can. J. Math. 4 (1952), 343—351.

9. *H. A. Heilbronn*, On an inequality in the elementary theory of numbers, Proc. Camb. Phil. Soc. 33 (1937), 207—209.

10. *L. K. Hua* and *H. S. Vandiver*, On the existence of solutions of certain equations in a finite field, Proc Nat. Acad. Sci. USA. 34 (1948), 258—263.

11. *L. K. Hua* and *H. S. Vandiver*, On the nature of solutions of certain equations in a finite field, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 35 (1949), 481—487.

12. *L. K. Hua* and *H. S. Vandiver*, On the number of solutions of some trinomial equations in a finite field, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 35 (1949), 477—481.

13. *H. Rohrbach*, Beweis einer zahlentheoretischen Ungleichung, J. reine angew. Math. 177 (1937), 193—196.

14. *St. Schwarz*, On Waring's problem for finite fields, Quart. J. of Math. (Oxford) 19 (1948), 123—128.

15. *A. Weil*, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 497—508.

Über die Mannigfaltigkeit der reduziblen quadratischen Formen

Von

J. Leicht, Innsbruck

(Eingelangt am 21. November 1955)

Zusammenfassung

Die Koeffizientensysteme von reduziblen quadratischen Formen in $n+1$ Veränderlichen bilden, wenn man sie als homogene Koordinaten eines $(\binom{n+2}{2} - 1)$-dimensionalen projektiven Raumes deutet, eine algebraische Mannigfaltigkeit. Sie hat die Dimension $2n$, die Ordnung $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ und das virtuelle arithmetische Geschlecht 0. Die Hilbertfunktion des definierenden Primideals ist $H(t, \mathfrak{a}) = \binom{\binom{n+t}{n}+1}{2}$. Die Mannigfaltigkeit der singulären Punkte besteht aus den Bildern der Formen vom Rang 1, sie ist eine Veronesesche Mannigfaltigkeit vom Grade 2.

Die quadratische Form in den $n+1$ Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$\Phi(x) = \Sigma\, a_{i_0 i_1 \ldots i_n}\, x_0^{i_0}\, x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \qquad (i_0 + i_1 + \ldots + i_n = 2)$$

mit Koeffizienten aus einem Grundkörper K der Charakteristik $\neq 2$ sei reduzibel:

$$\Phi(x) = U(x)\, V(x)$$

mit Linearformen

$$U(x) = \Sigma\, U_{j_0 j_1 \ldots j_n}\, x_0^{j_0}\, x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \qquad (j_0 + j_1 + \ldots + j_n = 1)$$

$$V(x) = \Sigma\, V_{k_0 k_1 \ldots k_n}\, x_0^{k_0}\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \qquad (k_0 + k_1 + \ldots k_n = 1)$$

Die Gleichung $\Phi = U\,V$ besagt dasselbe wie das System

$$(R)\ \delta\, a_{i_0 i_1 \ldots i_n} = U_{j_0 j_1 \ldots j_n}\, V_{k_0 k_1 \ldots k_n} + U_{k_0 k_1 \ldots k_n}\, V_{j_0 j_1 \ldots j_n} = \delta\, \Omega_{jk}$$

mit

$$(j_0, j_1, \ldots j_n) + (k_0, k_1, \ldots k_n) = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \quad \text{und}$$

$$\delta = \begin{cases} 2 \text{ für } (j_0, j_1, \ldots j_n) = (k_0, k_1, \ldots k_n). \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

So ist z. B.

$$a_{200\ldots0} = U_{100\ldots0}\, V_{100\ldots0}$$
$$a_{020\ldots0} = U_{010\ldots0}\, V_{010\ldots0}$$
$$a_{110\ldots0} = U_{100\ldots0}\, V_{010\ldots0} + U_{010\ldots0}\, V_{100\ldots0}$$
$$a_{101\ldots0} = U_{100\ldots0}\, V_{001\ldots0} + U_{001\ldots0}\, V_{100\ldots0}$$
$$a_{011\ldots0} = U_{010\ldots0}\, V_{001\ldots0} + U_{001\ldots0}\, V_{010\ldots0} \text{ usw.}$$

Im folgenden wird abkürzungsweise

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = U_{10\ldots0}^{\alpha_0}\, U_{01\ldots0}^{\alpha_1} \ldots U_{00\ldots1}^{\alpha_n} \quad \text{(desgleichen für die } V\text{)}$$

gesetzt. Dann ist

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n} = U_{\alpha_0 0\ldots0}\, U_{0\,\alpha_1\ldots0} \ldots U_{0\,0\ldots\alpha_n},$$

allgemeiner

$$U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}\, U_{\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_n} = U_{\alpha_0+\beta_0,\ \alpha_1+\beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n}$$

Denkt man sich die Größen $U_{j_0 j_1 \ldots j_n}$ $(j_0 + j_1 + \ldots + j_n = 1)$ als Unbestimmte, so wird auf diese Weise jedes aus ihnen gebildete Potenzprodukt eineindeutig durch ein Symbol $U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ beschrieben. Die Zahl $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ heiße der „Grad" von $U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}$. Sie gibt den Grad des definierenden Potenzproduktes an. Der Grad eines Produktes ist die Summe der Grade der Faktoren. Entsprechendes gilt für die V.

Die Ausdrücke Ω_{jk} rechts in (R) bleiben ungeändert, wenn man in ihnen die beiden Indexsysteme $(j_0, j_1, \ldots j_n)$ und $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$ vertauscht: $\Omega_{jk} = \Omega_{kj}$. Da ein Produkt zweier solcher Ausdrücke die gleiche Symmetrieeigenschaft hat, gilt:

Jedes aus den Koeffizienten $a_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ $(i_0 + i_1 + \ldots + i_n = 2)$ *gebildete Potenzprodukt des Grades t ist eine Summe von Ausdrücken*

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{\delta}\,(U_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}\, V_{\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_n} + U_{\beta_0 \beta_1 \ldots \beta_n}\, V_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}) \qquad \text{mit}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = t \qquad \text{und}$$

$$\delta = \begin{cases} 2 \text{ für } (\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n) = (\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n) \\ 1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dieser Satz kann umgekehrt werden:

Jeder Ausdruck $\Omega_{\alpha\beta}=\Omega_{\beta\alpha}$ *des Grades* t *in den* U *und in den* V *ist als homogenes Polynom in den* $a_{i_0 i_1 \dots i_n}$ $(i_0 + i_1 + \dots + i_n = 2)$ *vom Grade* t *darstellbar.*

Beweis:

Für $t = 1$ liefern die Gleichungen (R) die gesuchte Darstellung.

Sei der Satz für den Grad t bereits bewiesen und es liege ein Ausdruck $\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{\delta}(U_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n} V_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n} + U_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_n} V_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n})$ vom Grade $t + 1$ vor.

Ist für ein $0 \leq i \leq n$ Min $(\alpha_i, \beta_i) > 0$, etwa $\alpha_0 \geq 1$ und $\beta_0 \geq 1$, so ist

$$\Omega_{\alpha\beta} = U_{10 \dots 0} V_{10 \dots 0} \Omega_{\alpha'\beta'} = a_{20 \dots 0} \Omega_{\alpha'\beta'},$$

wobei

$$\Omega_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{\delta}(U_{\alpha_0-1, \alpha_1, \dots, \alpha_n} V_{\beta_0-1, \beta_1, \dots, \beta_n} + U_{\beta_0-1, \beta_1, \dots, \beta_n} V_{\alpha_0-1, \alpha_1, \dots, \alpha_n})$$

den Grad t hat und somit nach Induktionsvoraussetzung als eine Form in den a vom Grade t darstellbar ist. Also ist $\Omega_{\alpha\beta}$ eine Form in den a vom Grade $t + 1$. Demnach kann für $\Omega_{\alpha\beta}$ im folgenden immer $\alpha_i \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ angenommen werden.

Ist für ein $0 \leq i \leq n$ $\alpha_i > 1$ oder $\beta_i > 1$, etwa $\alpha_0 \geq 2$, so ist wegen $\beta_0 = 0$ ein Index in der Folge $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$, z. B. $\beta_1 > 0$. Es kommt

$$(U_{10 \dots 0} V_{01 \dots 0} + U_{01 \dots 0} V_{10 \dots 0})(U_{\alpha_0-1, \alpha_1, \dots, \alpha_n} V_{0, \beta_1-1, \dots, \beta_n} + U_{0, \beta_1-1, \dots, \beta_n} V_{\alpha_0-1, \alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \Omega_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha'\beta'}$$

mit

$$\Omega_{\alpha'\beta'} = U_{\alpha_0-1, \alpha_1+1, \dots, \alpha_n} V_{1, \beta_1-1, \dots, \beta_n} + U_{1, \beta_1-1, \dots, \beta_n} V_{\alpha_0-1, \alpha_1+1, \dots, \alpha_n}.$$

Links steht nach Induktionsvoraussetzung das Produkt von $a_{110 \dots 0}$ mit einer Form in den a vom Grad t, $\Omega_{\alpha'\beta'}$ ist wegen Min $(\alpha_0 - 1, 1) > 0$ nach dem eben gezeigten eine Form in den a vom Grade $t + 1$, also ist auch $\Omega_{\alpha\beta}$ eine Form in den a vom Grade $t + 1$.

Für $n \geq 3$ bleibt noch der Fall zu erledigen, daß in $\Omega_{\alpha\beta}$ durchweg α_i und $\beta_i = 0$ oder $= 1$ mit $\alpha_i \beta_i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ ist. In $\Omega_{\alpha\beta}$ müssen beide Indexreihen α und β mindestens zwei Einser enthalten, also ist bis auf Indexvertauschungen

$$\Omega_{\alpha\beta} = U_{1001\varrho} V_{0110\sigma} + U_{0110\sigma} V_{1001\varrho}$$

(ϱ und b deuten etwaige weitere Indizes an). Es ist

$$(U_{1000\,l}\,V_{0100\,l}+U_{0100\,l}\,V_{1000\,l})\,(U_{0001\,\varrho}\,V_{0010\sigma}+U_{0010\sigma}\,V_{0001\,\varrho})=\Omega_{\alpha\beta}+\Omega_{\alpha'\beta'}$$

und

$$(U_{1000\,l}\,V_{0010\,l}+U_{0010\,l}\,V_{1000\,l})\,(U_{0001\,\varrho}\,V_{0100\sigma}+U_{0100\sigma}\,V_{0001\,\varrho})=\Omega_{\alpha\beta}+\Omega_{\alpha''\beta''}$$

(l bezeichnet weitere Nullen.) Links steht nach Induktionsvoraussetzung je ein Produkt von $a_{1100\,l}$ bzw. $a_{1010\,l}$ mit einer Form in den a vom Grade t. Rechts bedeuten

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha'\beta'} &= U_{1010\,\sigma}\,V_{0101\,\varrho}+U_{0101\,\varrho}\,V_{1100\,\sigma}\\ \Omega_{\alpha''\beta''} &= U_{1100\,\sigma}\,V_{0011\,\varrho}+U_{0011\,\varrho}\,V_{1100\,\sigma}\end{aligned}$$

Nun ist aber, wie leicht zu bestätigen

$$\Omega_{\alpha'\beta'}+\Omega_{\alpha''\beta''}=(U_{0100\,l}\,V_{0010\,l}+U_{0010\,l}\,V_{0100\,l})\,(U_{1000\,b}\,V_{0001\,\varrho}+U_{0001\,\varrho}\,V_{1000\,b})$$

nach Induktionsvoraussetzung ein Produkt von $a_{0110\,l}$ mit einer Form in den a vom Grade t, somit ist $2\,\Omega_{\alpha\beta}$, also auch $\Omega_{\alpha\beta}$ eine Form in den a des Grades $t+1$, was den Beweis vollendet.

Zu einem vorgegebenen Grad t gibt es $\alpha(t)=\left(\binom{n+2}{2}-1+t\right)$ verschiedene Potenzprodukte $a^{(t)}$ in den Koeffizienten $a_{i_0 i_1 \dots i_n}$ $(i_0+i_1+\dots+i_n=2)$ und $\varrho(t)=\left(\binom{n+t}{t}+1\right)=\left(\binom{n+t}{n}+1\right)$ verschiedene Ausdrücke $\Omega^{(t)}_{\alpha\beta}$. Letztere sind linear unabhängige Formen in den U und V. Der soeben bewiesene Satz lehrt, daß es unter den $\alpha(t)$ Potenzprodukten $a^{(t)}$, wenn man sie vermöge (R) als Polynome in den U und V darstellt, genau $\varrho(t)$ linear unabhängige gibt.

Sei nun $\mathfrak{a}$ das H-Ideal[1] aller Polynome $f(a)$ im P-Ring $K[\dots, a_{i_0 i_1 \dots i_n}, \dots]$ für die nach Ersetzung $a=a(U,V)$ gemäß (R) identisch $f(a(U,V))\equiv 0$ ist. $\mathfrak{a}$ ist prim, denn aus $p(a(U,V))\,q(a(U,V))\equiv 0$ und $q(a(U,V))\not\equiv 0$ folgt $p(a(U,V))\equiv 0$. In $\mathfrak{a}$ gibt es, wie leicht zu sehen, $\alpha(t)-\varrho(t)$ linear unabhängige Formen des Grades t, somit gilt für die Hilbertfunktion[2] $H(t;\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$: $H(t,\mathfrak{a})=\alpha(t)-(\alpha(t)-\varrho(t))=\varrho(t)$, d. h.

$$H(t;\mathfrak{a})=\left(\binom{n+t}{n}+1\right)$$

Sie ist ein Polynom in t vom Grade $2n$. Aus der Darstellung[3]

$$H(t;\mathfrak{a})=h_0\binom{t}{2n}+h_1\binom{t}{2n-1}+\dots h_{2n}=\left(\binom{n+t}{n}+1\right)$$

erhält man durch Vergleichen:

$\frac{h_0}{(2n)!} = \frac{1}{2 \cdot (n!)^2}$ und $h_{2n} = \binom{\binom{n}{n}+1}{2}$, also $h_0 = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ und $h_{2n} = 1$.

In üblicher Weise kann man die $\binom{n+2}{2}$ Koeffizienten $a_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ $(i_0 + i_1 + \ldots + i_n = 2)$ einer quadratischen Form von $n+1$ Veränderlichen als homogene Koordinaten eines Punktes in einem $(\binom{n+2}{2}-1)$-dimensionalen projektiven Raum deuten. Den reduziblen Formen $\Phi(x)$ entspricht dabei eine Punktmente $\mathfrak{R}$, die im Nullstellengebilde[4] $NG(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ enthalten ist. Es ist sogar

$$\mathfrak{R} = NG(\mathfrak{a})$$

$\mathfrak{R}$ ist nämlich eine *algebraische Mannigfaltigkeit*, da für die Reduzibilität einer quadratischen Form das Verschwinden aller dreireihigen Unterdeterminanten ihrer Koeffizientenmatrix charakteristisch ist. Die Dimension[5] von $\mathfrak{R}$ ist $2n$, wie die Parameterdarstellung (R) von $\mathfrak{R}$ ergibt, in Übereinstimmung mit der aus $H(t; \mathfrak{a})$ entnommenen[6] Dimension $2n$ von $NG(\mathfrak{a})$. Als irreduzible Mannigfaltigkeit kann $NG(\mathfrak{a})$ keine echte algebraische Teilmannigfaltigkeit gleicher Dimension enthalten[7], daher sind die beiden Gebilde $\mathfrak{R}$ und $NG(\mathfrak{a})$ identisch. Es gilt somit:

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$ ist algebraisch von der Dimension $2n$, ihre Ordnung[8] *ist $h_0 = \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$, das virtuelle arithmetische Geschlecht*[9] $(-1)^{2n}(h_{2n} - 1) = 0$.

Betrachtet man die Ableitungen der dreireihigen Unterdeterminanten einer symmetrischen Matrix nach ihren Elementen (wobei der Grundkörper K die Charakteristik 0 haben soll), oder faßt man $NG(\mathfrak{a})$ als *Projektion*[10] *der bekannten „Segre'schen Mannigfaltigkeit"* auf, dann sieht man:

Die singulären Punkte[11] *von $\mathfrak{R}$ sind genau die Bilder der quadratischen Formen vom Range 1, d. h. der Formen, die als Quadrate von Linearformen darstellbar sind, sie bilden somit eine „Veronesesche Mannigfaltigkeit zweiten Grades".*

Diese algebraische Untermannigfaltigkeit $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{R}$ kann man ähnlich wie $\mathfrak{R}$ behandeln. Dabei tritt an Stelle von (R) das System

$$(Q)\ \delta\, a_{i_0 i_1 \ldots i_n} = 2\, U_{j_0 j_1 \ldots j_n} U_{k_0 k_1 \ldots k_n} = 2\, U_{j_0+k_0,\, j_1+k_1,\, \ldots,\, i_n+k_n} \text{ mit}$$

$$(j_0, j_1, \ldots j_n) + (k_0, k_1, \ldots k_n) = (i_0, i_1, \ldots i_n) \quad \text{und}$$

$$\delta = \begin{cases} 2 \text{ für } (j_0, j_1, \ldots j_n) = (k_0, k_1, \ldots k_n) \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

als Äquivalent für $\Phi(x) = U^2(x)$ mit

$$U(x) = \Sigma\, U_{j_0 j_1 \dots j_n}\, x_0^{j_0}\, x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},\ (j_0 + j_1 + \dots + j_n = 1).$$

Satz: *Jedes Potenzprodukt in den a vom Grade t ist vermöge* (Q) *ein Ausdruck* $2^{\mu}\, U_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_n}$ *mit* $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 2\,t\ (0 \leq \mu \leq t)$. *Umgekehrt ist jeder Ausdruck* $U_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_n}$ *vom Grade* 2^t *als Form in den a des Grades t darstellbar.*

Beweis:

Es genügt, die Richtigkeit der Umkehrung zu zeigen.

(Q) bestätigt die Behauptung für $t = 1$. Gilt sie für den Grad t, so habe $U_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_n}$ den Grad $2(t+1)$, d. h. es sei $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 2(t+1)$. Ist für ein $0 \leq i \leq n$ $\gamma_i \geq 2$, etwa $\gamma_0 \geq 2$, dann ist $U_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_n} = a_{20 \dots 0}\, U_{\gamma_0 - 2, \gamma_1, \dots, \gamma_n}$ wegen $(\gamma_0 - 2) + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 2\,t$ nach Induktionsvoraussetzung eine Form in den a vom Grade $t+1$. Ist dagegen $\gamma_i = 0$ oder $= 1$ für jedes $0 \leq i \leq n$, so sei etwa $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$. Wegen $0 + 0 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 2\,t$ ist $U_{\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n} = U_{11 \gamma_2 \dots \gamma_n} = \frac{1}{2}\, a_{110 \dots 0}\, U_{00 \gamma_2 \dots \gamma_n}$ wieder eine Form in den a des Grades $t+1$, der Satz gilt daher für jeden Grad.

Zu festem t bilden die Ausdrücke $U_{\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_n}$ mit $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 2\,t$ ein linear unabhängiges System von Formen in den $U_{j_0 j_1 \dots j_n}$ $(j_0 + j_1 + \dots + j_n = 1)$.

Ihre Zahl beträgt $\binom{n+2t}{2t} = \binom{n+2t}{n}$. Das Primideal $\bar{\mathfrak{a}}$ aller Polynome $f(a)$ aus dem P-Ring $K[\dots, a_{i_0 i_1 \dots i_n}, \dots]$, für die nach Ersetzung $a = a(U)$ gemäß (Q) identisch $f(a(U)) \equiv 0$ ist, hat demnach die Hilbertfunktion[2]

$$H(t; \bar{\mathfrak{a}}) = \binom{n+2t}{n}$$

Ihr Grad n in t gibt die Dimension von $NG(\bar{\mathfrak{a}})$ an, in Übereinstimmung mit der aus der Parameterdarstellung (Q) berechneten Dimension n von $\mathfrak{Q}$. Koeffizientenvergleich ergibt aus

$$H(t, \bar{\mathfrak{a}}) = \bar{h}_0 \binom{t}{n} + \bar{h}_1 \binom{t}{n-1} + \dots + \bar{h}_n = \binom{n+2t}{n}$$

$$\frac{\bar{h}_0}{n!} = \frac{2^n}{n!} \text{ und } \bar{h}_n = \frac{n!}{n!}, \text{ also } \bar{h}_0 = 2^n,\ \bar{h}_n = 1.$$

Die Veronesesche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{Q}$ *der singulären Punkte von* $\mathfrak{R}$ *hat die Dimension n, die Ordnung* $\bar{h}_0 = 2^n$ *und das virtuelle arithmetische Geschlecht* $(-1)^n (\bar{h}_n - 1) = 0$.

Bemerkung: Aus dem Satz von *L. Kronecker* und *C. Runge*[12] über die linearen Relationen zwischen den Unterdeterminanten einer symmetrischen Matrix kann man den Wert der Hilbertfunktion nur für $t = 3$, bzw. 2 bei $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ entnehmen.

Prof. Dr. Wolfgang Gröbner danke ich für seine Anregungen und seine stete Hilfsbereitschaft, mit der er mir die Abfassung dieser Arbeit ermöglicht hat.

Literatur

[1] *W. Gröbner:* Moderne algebraische Geometrie (Springer-Verlag, Wien 1949).

[2] *W. Gröbner:* „Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit". Archiv der Mathematik Vol. III (1952), Fasc. 5, Seite 351—359.

[3] *Th. Lepage:* Bulletin de la classe des sciences. Académie royale de Belgique, Bd. 33 (1947), Seite 527—541; Bd. 35 (1949), Seite 694—708; Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, Jahrg. 1948—49, Seite 26—32.

(1) [1] Seite 52, Nr. 124. 5.
(2) [1] S. 155, Nr. 141.4.
(3) [1] S. 161, Nr. 141.15.
(4) [1] S. 81, Nr. 127.1.
(5) [1] S. 96, Nr. 131.2.
(6) [1] S. 161, Nr. 141.15.
(7) [1] S. 111, Nr. 133.12.
(8) [1] S. 161, Nr. 141.15.
(9) [2] S. 353, Nr. 2.
(10) [1] S. 168, Nr. 143.10.
(11) [1] S. 119, Nr. 134.8.
(12) Dieser Satz wird z. B. in den Arbeiten [3] bewiesen.

Eine Ungleichung über konvexe Polyeder

Von

A. Florian, Graz

Mit 3 Textabbildungen

(Eingelangt am 2. Dezember 1955)

Ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten liege in einer Einheitskugel. Für das Volumen V des Polyeders wurde von *L. Fejes Tóth* die Vermutung ausgesprochen[1], daß

$$V \leq \frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k}\right), \qquad (1)$$

und hiefür ein Beweisgang angedeutet (l. c. S. 129f.).

In der vorliegenden Arbeit wird der exakte Beweis von (1) gegeben. Gleichheit besteht nur für die regulären Polyeder mit der Einheitskugel als Umkugel. Zu diesem Zweck wird ein allgemeiner Satz über konkave bzw. konvexe Funktionen bewiesen und daraus die Konkavität der Funktion

$$U(\tau, p) = \frac{p}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right) \quad p \geq 3,\ 0 \leq \tau \leq \pi$$

abgeleitet. Weiters ergibt sich mit demselben Satz, daß die Funktion

$$T(\tau, p) = \frac{p}{2} \sin \frac{2\pi}{p} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p} - 1\right) \quad p \geq 3,\ 0 \leq \tau < 2\pi$$

konvex ist. Damit ist auch der l. c. S. 124 angeführte erste Beweis für das Gegenstück zu (1)

$$V' \geq \frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1\right) \qquad (1')$$

[1] *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum; Springer-Verlag Berlin 1953, S. 128. Die hier mit l. c. bezeichneten Zitate beziehen sich auf dieses Buch, das auch ein ausführliches Literaturverzeichnis enthält. Die Originalarbeiten des Verfassers (über das vorliegende Problem: Canadian J. Math. 2, 22 (1950)) waren mir nicht zugänglich.

(V' = Volumen eines die Einheitskugel enthaltenden Polyeders) vollständig. Für den Satz (1') gibt *Fejes Tóth* noch zwei weitere Beweise[2,3].

Eine Folge von (1') ist die Ungleichung (l. c. S. 123)[4,5]

$$V_n \geq (n-2)\,(3\,\mathrm{tg}^2\,\omega_n - 1)\sin 2\,\omega_n \qquad \omega_n = \frac{\pi\, n}{6\,n-12}$$

(V_n = Volumen eines die Einheitskugel enthaltenden n-Flachs), die in enger Beziehung zur isoperimetrischen Ungleichung

$$\frac{O_n^3}{V_n^2} \geq 54\,(n-2)\,\mathrm{tg}\,\omega_n\,(4\sin^2\omega_n - 1)$$

(O_n = Oberfläche) steht (l. c. S. 135 sowie[6] § 27). Die unter 4, 5 zitierten Arbeiten verwenden gleichfalls hypothetisch die Konvexität der Funktion $T(\tau, p)$.

Von den Folgerungen der Ungleichung (1) seien erwähnt: Da man jedes Polyeder mit n Ecken als (eventuell entartetes) Dreieckpolyeder ($f = 2\,n - 4$, $k = 3\,n - 6$) auffassen kann, gilt für das Volumen U_n eines jeden, in der Einheitskugel enthaltenen Polyeders mit n Ecken

$$U_n \leq \frac{n-2}{6}\,(3 - \mathrm{ctg}^2\,\omega_n)\,\mathrm{ctg}\,\omega_n,$$

was *Fejes Tóth* direkt zeigt (l. c. S. 126). Ferner hat jedes Polyeder mit n Flächen höchstens $3\,n - 6$ Kanten (genau $3\,n - 6$, wenn es ein Dreikantpolyeder ist)[7]. Da die rechte Seite in (1) gleich $f\,U(\frac{4\pi}{f}, \frac{2k}{f})$ ist und $U_p(\tau, p) > 0$ ist, wie unter 2. bewiesen wird, folgt für das Volumen U_n' eines in der Einheitskugel enthaltenen n-Flachs

$$U_n' \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}\,(n-2)\cos^2\omega_n(3 - \mathrm{ctg}^2\,\omega_n).$$

Gleichheit tritt in diesen beiden Formeln für reguläre Dreieck- bzw. Dreikantpolyeder ein, die der Einheitskugel einbeschrieben sind.

---

[2] Amer. J. Math. 70, 174 (1948).
[3] Canadian J. Math. 2, 22 (1950).
[4] *M. Goldberg*, Tokohu Math. J. 40, 226 (1935).
[5] *L. Fejes Tóth*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (2), 51 (1948).
[6] *H. Hadwiger*, Altes und Neues über konvexe Körper, Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart 1955.
[7] L. c. S. 15.

Sind R und r die Radien der Umkugel bzw. Inkugel eines konvexen Polyeders mit der Eckenzahl e, Flächenzahl f und Kantenzahl k, so gilt nach (1) und (1′)

$$\frac{k}{3}\sin\frac{\pi f}{k}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k}-1\right)r^3\leq V\leq$$

$$\leq\frac{2k}{3}\cos^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi e}{2k}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi e}{2k}\right)R^3$$

und daher

$$\frac{R}{r}\geq\operatorname{tg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{\pi}{q};$$

$p=\dfrac{2k}{f}$ ist die mittlere Seitenzahl der Flächen, $q=\dfrac{2k}{e}$ die mittlere Kantenzahl der Ecken. Gleichheit besteht nur für die regulären Polyeder. Betrachtet man hingegen alle Polyeder mit gegebener Kantenzahl k, so folgt aus der letzten Ungleichung

$$\frac{R}{r}\geq\operatorname{tg}^2\frac{\pi(k+2)}{4k};$$

nur für das reguläre Tetraeder ist das Gleichheitszeichen richtig. Diese Abschätzung stellt eine Verschärfung der Ungleichung

$$\frac{R'}{r'}\geq\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\frac{\pi k}{6(k-3)}$$

(l. c. S. 119) dar, wobei R', r' die Radien der Minimalkugelschale eines Polyeders mit k Kanten sind. Der Beweis dafür soll in einer weiteren Arbeit erbracht werden.

1. Es genügt, den Beweis von (1) für alle jene Polyeder $\mathfrak{P}$ zu führen, die den Mittelpunkt M der Einheitskugel $\mathfrak{K}$ enthalten. Denn liegt M nicht in $\mathfrak{P}$, so hat die Umkugel mit dem Mittelpunkt M_1, der ja in $\mathfrak{P}$ liegt, eine Radius kleiner als 1. $\mathfrak{P}$ läßt sich durch eine Dilatation von M_1 aus vergrößern, und zwar so, daß das daraus entstehende Polyeder $\mathfrak{P}'$ in der Einheitskugel um M_1 liegt. Da $\mathfrak{P}'$ dieselbe Ecken- und Flächenzahl wie $\mathfrak{P}$ hat, gilt: Ist die Ungleichung

$$V\leq u(e,f)$$

(u eine beliebige Funktion) richtig für alle Polyeder, die in $\mathfrak{K}$ liegen und M enthalten, so gilt sie auch (unter Ausschluß des Gleichheitszeichens) für alle Polyeder in $\mathfrak{K}$, die M nicht enthalten.

2. Wir beweisen nun einen einfachen, aber für später wichtigen Satz über konvexe bzw. konkave Funktionen.

Die Kollineation

$$u = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0},\ v = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0}$$

bildet einen konvexen Bereich $\mathfrak{B}^*$ der xy-Ebene, in dem $a_0x+b_0y+c_0\neq 0$ ist, auf einen konvexen Bereich $\mathfrak{B}$ der uv-Ebene ab. Wir zeigen: Ist die Funktion $g(u, v)$ in $\mathfrak{B}$ stetig und konvex (konkav) und $a_0x+b_0y+c_0>0$ in $\mathfrak{B}^*$, so ist auch

$$f(x, y) \equiv (a_0 x + b_0 y + c_0)\, g\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0},\ \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0}\right)$$

in $\mathfrak{B}^*$ konvex (konkav). g und f verhalten sich entgegengesetzt, wenn $a_0 x + b_0 y + c_0 < 0$ ist.

Beweis[8]: a) Eine konvexe Funktion $g(u, v)$ ist dadurch gekennzeichnet, daß die sie darstellende Fläche $w = g(u, v)$ nirgends unterhalb einer beliebigen ihrer Stützebenen liegt.

b) Die Kollineation

$$u = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_0 x + b_0 y + c_0},\ v = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_0 x + b_0 y + c_0},\ w = \frac{z}{a_0 x + b_0 y + c_0}$$

bildet die Fläche $z = f(x, y)$ auf die Fläche $w = g(u, v)$ ab; ferner gilt bei dieser Kollineation für zwei Punkte mit derselben Horizontalprojektion (x_0, y_0)

$$w_2 - w_1 = \frac{z_2 - z_1}{a_0 x_0 + b_0 y_0 + c_0},$$

weshalb die Eigenschaft a) bei der Kollineation erhalten bleibt, sofern $a_0 x + b_0 y + c_0 > 0$.

Für später wollen wir festhalten: Ist $g(u, v)$ in $\mathfrak{B}$ stetig und hat g im Innern von $\mathfrak{B}$ stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, so ist die Funktion in $\mathfrak{B}$ bekanntlich genau dann konvex (konkav), wenn für alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ und für alle α, β gilt[9]

$$g_{uu}\,\alpha^2 + 2\,g_{uv}\,\alpha\,\beta + g_{vv}\,\beta^2 \geq 0\ (\leq 0).$$

---

[8] Den folgenden kurzen Beweis verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. *J. Radon*, Wien.

[9] *Hardy, Littlewood* und *Pólya*, Inequalities, Cambridge, Univ. Press 1934, S. 80.

$g(u, v)$ ist streng konvex (konkav), wenn diese Form positiv (negativ) definit ist.

Wir geben zwei Anwendungen, und zwar zunächst auf das l. c. S. 123 behandelte Problem des einer Einheitskugel umschriebenen Polyeders. Der dort angegebene erste Beweis für (1′) ist unvollständig, da die Konvexität der mit $T(\tau, p)$ bezeichneten Funktion

$$T(\tau, p) = \frac{p}{2} \sin \frac{2\pi}{p} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p} - 1 \right)$$

nicht bewiesen wurde.

Setzt man $p = \pi x$, $\tau = 2\pi y$, so bleibt die Funktion

$$f(x, y) = x \sin \frac{2}{x} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} \operatorname{ctg}^2 \frac{1 - y}{x} - 1 \right)$$

zu untersuchen. Die Abbildung

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{\pi}{2} - \frac{1 - y}{x}$$

führt auf die Funktion

$$g(u, v) = \sin 2u \,.\, (\operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v - 1).$$

Bis auf einen konstanten Faktor ist das die im zweiten Beweis (S. 125) auftretende Funktion $F(u, v)$, deren Konvexität dort gezeigt wurde. Es ist

$$g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 = \frac{32 \operatorname{tg}^4 u}{\cos^6 v} (\cos^2 u - \sin^2 v)^2,$$

$$g_{vv} = 2 \sin 2u \operatorname{tg}^2 u \frac{1 + 2 \sin^2 v}{\cos^4 v};$$

beide Ausdrücke sind > 0 für $0 < u,\ v < \frac{\pi}{2},\ u + v > \frac{\pi}{2}$. Daher ist $f(x, y)$ streng konvex in jedem Rechteck $\frac{3}{\pi} \leq x \leq x_0,\ 0 \leq y \leq y_0 < 1$, denn $g(u, v)$ hat im entsprechenden Bereich der uv-Ebene dieselben Eigenschaften. Somit ist auch $T(\tau, p)$ streng konvex in jedem Rechteck $3 \leq p \leq p_0,\ 0 \leq \tau \leq \tau_0 < 2\pi$.

Als zweite Anwendung betrachten wir die Funktion (l. c. S. 129)

$$U(\tau, p) = \frac{p}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p} \right), \qquad (2)$$

die für das Problem des einbeschriebenen Polyeders von Bedeutung ist. Wir setzen wieder $p = \pi x$, $\tau = 2\pi y$ und nehmen für die Funktion

$$f(x, y) = x \cos^2 \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{1-y}{x} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{1-y}{x}\right)$$

die Abbildung

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1-y}{x}.$$

Dies führt auf

$$g(u, v) = \sin^2 u \operatorname{tg} v (1 - \operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v).$$

Man erhält nach einiger Rechnung

$$g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 = \frac{\sin^2 2u}{\cos^2 v} (\operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v - 1)^2 (9 \operatorname{tg}^4 u \operatorname{tg}^2 v + 6 \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v - 1)$$

$$g_{vv} = \frac{2 \sin^2 u \operatorname{tg} v}{\cos^2 v} [1 - 3 \operatorname{tg}^2 u (1 + 2 \operatorname{tg}^2 v)].$$

Somit ist $g_{uu} g_{vv} - g_{uv}^2 > 0$, $g_{vv} < 0$, wenn etwa

$$\frac{\pi}{6} \leq u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{6} < \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v < 1.$$

Nehmen wir an $p \geq 3$, $0 < \tau \leq \pi$, so wird $x \geq \frac{3}{\pi}$, $0 < y \leq \frac{1}{2}$,

also

$$\frac{\pi}{6} \leq u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < \frac{\pi}{3}$$

und

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \leq v < \frac{\pi}{2} - u.$$

Weiter ist

$$\frac{\pi}{2} - u = \alpha \leq \frac{\pi}{3},$$

und deshalb

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{6}, \quad 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \geq \frac{2}{3}.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

und wegen

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \leq \operatorname{tg} v < \operatorname{ctg} u$$

gilt

$$\tfrac{1}{3} \operatorname{ctg} u \leq \operatorname{tg} v < \operatorname{ctg} u$$

oder

$$\tfrac{1}{3} \leq \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v < 1,$$

womit alle Bedingungen für u und v erfüllt sind. Daraus schließt man, daß $U(\tau, p)$ streng konkav ist in jedem Rechteck $3 \leq p \leq p_0$, $0 \leq \tau \leq \pi$.

Als weitere Eigenschaft von U erwähnen wir: $U_p(\tau, p) > 0$ für $0 < \tau < 2\pi$, $p \geq 3$.

Beweis: Es ist

$$U(\tau, p) = \tfrac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} F(\tau, p), \tag{3}$$

wobei

$$F(\tau, p) = \frac{p}{2} \sin \frac{2\pi}{p} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right). \tag{3'}$$

Wir zeigen zuerst, daß $F_p > 0$.

Dazu setzen wir wieder $p = \pi x$, $\tau = 2\pi y$ und erhalten

$$f(x, y) = x \sin \frac{2}{x} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x} \operatorname{tg}^2 \frac{1 - y}{x}\right).$$

Die Kollineation $u = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1 - y}{x}$ führt auf

$$g(u, v) = \sin 2u (1 - \operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v).$$

g unterscheidet sich von der zu $T(\tau, p)$ gehörigen Funktion nur durch das Vorzeichen, so daß wegen der Konkavität von $f(x, y)$ gilt

$$f_{xx} < 0 \text{ für } x > \frac{2}{\pi},\ 0 < y < 1.$$

Ferner ist

$$f_x = g + \frac{g_u - (1 - y) g_v}{x}.$$

Wegen

$$\lim_{x \to +\infty} g_u = -2 [1 + (1 - y)^2],$$

$$\lim_{x \to +\infty} g_v = -4(1 - y),$$

$$\lim_{x \to +\infty} g = 0$$

ist $\lim_{x \to +\infty} f_x = 0$, was zusammen mit $f_{xx} < 0$ zeigt, daß $f_x > 0$, also $F_p > 0$ für $p \geq 3$, $0 < \tau < 2\pi$.

Es sei

$$\omega(x, y) = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \operatorname{tg} \frac{1-y}{x};$$

dann ist

$$\omega_x = \tfrac{1}{2} \frac{\sin \dfrac{2(1-y)}{x} - (1-y) \sin \dfrac{2}{x}}{x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x} \cos^2 \dfrac{1-y}{x}} -$$

und

$$\sin \alpha t - \alpha \sin t > 0$$

für

$$0 < t \leq \pi, \ 0 < \alpha < 1;$$

die letzte Funktion von t nimmt nämlich monoton zu und verschwindet für $t = 0$. Also ist $\omega_x > 0$ im Bereich $x \geq \dfrac{3}{\pi}$, $0 < y < 1$ und der erste Faktor in (3) gleichfalls eine monoton zunehmende Funktion von p. Damit ist $U_p > 0$ gezeigt.

3. Der Beweisversuch für (1) bei *Fejes Tóth* (l. c.) besteht aus zwei Schritten; der zweite verwendet im wesentlichen nur die von ihm vermutete und hier bewiesene Konkavität von $U(\tau, p)$. Der erste Teil enthält folgende Vermutung: Ein p-Eck t liege in der Einheitskugel. τ sei die Projektion von t aus dem Kugelmittelpunkt auf die Kugelfläche (kurz: Projektion) und v der Inhalt der Pyramide mit der Basis t und der Spitze im Kugelmittelpunkt. Die in 2. betrachtete Funktion $F(\tau, p)$ gibt den Inhalt eines regulären p-Eckes, dessen Eckpunkte auf der Kugelfläche liegen und das die Projektion τ besitzt, $U(\tau, p)$ gibt den Inhalt der zugehörigen Pyramide. Dann soll gelten: Für ein beliebiges p-Eck t ist

$$v \leq U(\tau, p); \tag{4}$$

v erreicht also sein Maximum für ein der Kugel einbeschriebenes reguläres p-Eck mit der Projektion τ.

Zunächst wird gezeigt, daß es genügt, (4) für p-Ecke zu beweisen, deren Eckpunkte auf der Kugel liegen.

Unter den in der Ebene von t (und in der Kugel) liegenden n-Ecken ($n \leq p$) mit der Projektion τ gibt es eines von größerem Inhalt; seine Eckpunkte müssen auf der Kugel liegen. Nehmen wir an, dies sei für einen Eckpunkt C nicht der Fall. A, B seien die benachbarten Eckpunkte, C', A', B' ihre Projektionen auf die Kugel. Wir legen durch C eine Gerade parallel AB, ihre Projektion auf die Kugel schneidet oder berührt den Lexellschen Kreis von A' B' C' ind C'. Verschiebt man C in der Ebene des Polygons so, daß C' auf dem Lexellschen Kreis wandert, so ändert sich der Inhalt des Polygons, während die Projektion τ fest bleibt. Verschiebt man C in der passenden Richtung, so wird der Inhalt des Polygons größer. Es genügt somit der Beweis von (4) für alle n-Ecke ($n \leq p$) mit den Eckpunkten auf der Kugel. Da $U(\tau, p)$ mit p wächst, kann man sich auf eingeschriebene p-Ecke beschränken und Gleichheit kann in (4) höchstens für solche bestehen.

4. Wir nehmen zuerst den Fall an, daß das Polygon den Mittelpunkt seines Umkreises im Innern enthält (Abb. 1) und leiten unter dieser Voraussetzung eine Abschätzung für die Höhe h der Pyramide (mit dem p-Eck als Basis und der Spitze im Kugelmittelpunkt) ab.

Der Inhalt τ der Projektion ist

Abb. 1

$$\tau = \sum_{n=1}^{p} [\varphi_n - 2 \operatorname{arc\,tg} (h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2})],$$

also

$$\sum_{n=1}^{p} \operatorname{arc\,tg} (h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}) = \frac{2\pi - \tau}{2}. \tag{5}$$

Für die Funktion $\psi(x) = \operatorname{arc\,tg} (h \operatorname{tg} \frac{x}{2})$ findet man

$$\psi''(x) = \frac{h(1-h^2)}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{(1 + h^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2} > 0 \quad (0 < x < \pi),$$

also ist $\psi(x)$ konvex und

$$\sum_{n=1}^{p} \operatorname{arc\,tg} (h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}) \geq p \operatorname{arc\,tg} (h \operatorname{tg} \frac{\pi}{p}).$$

Daraus folgt mit (5)

$$h \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p} \tag{6}$$

und Gleichheit gilt nur für ein reguläres p-Eck.

Ferner beweisen wir folgende Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{p} \operatorname{arc\,tg}\,(h_n \operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2}) \leq$$

$$\leq p \operatorname{arc\,tg}\left\{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1+\ldots+\varphi_p}{2p} \cdot \left[1 - \frac{\sum_{n=1}^{p}(1-h_n^2)\sin\varphi_n}{p \sin\dfrac{\varphi_1+\ldots+\varphi_p}{p}}\right]^{1/2}\right\}, \tag{7}$$

wobei $0 < h_n < 1,\ 0 < \varphi_n < \pi\ (n = 1, \ldots, p);\ p \geq 2$.

Gleichheit besteht nur für $h_1 = \ldots = h_p,\ \varphi_1 = \ldots = \varphi_p$. (7) hat die Form

$$\sum_{n=1}^{p} f(x_n, y_n) \leq p\, f\left(\left[1 - \frac{\sum_{n=1}^{p}(1-x_n^2)\sin y_n}{p \sin\dfrac{y_1+\ldots+y_p}{p}}\right]^{1/2}, \frac{\sum_{n=1}^{p} y_n}{p}\right)$$

$$(0 < x_n < 1,\ 0 < y_n < \pi), \tag{8}$$

mit $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\,(x \operatorname{tg}\dfrac{y}{2})$.

Zunächst beweisen wir: Gilt (8) für $p = 2$, so gilt die Formel für alle p (durch Induktion). Hierauf geben wir für (8) im Fall $p = 2$ eine notwendige und hinreichende Bedingung und zeigen schließlich, daß $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\,(x \operatorname{tg}\dfrac{y}{2})$ diese erfüllt.

Im ersten Teil des Beweises folgen wir der Schlußweise der Jensenschen Ungleichung. Aus der Gültigkeit von (8) für $p = 2$

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \leq 2\, f\left[\left(1 - \frac{\sum_{n=1}^{2}(1-x_n^2)\sin y_n}{2 \sin\dfrac{y_1+y_2}{2}}\right]^{1/2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \tag{9}$$

folgt die Richtigkeit für $p = 4$:

$$\sum_{n=1}^{4} f(x_n, y_n) \leq 2\, f\left(\left[1 - \frac{\sum_{n=1}^{2}(1-x_n^2)\sin y_n}{2 \sin\dfrac{y_1+y_2}{2}}\right]^{1/2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) +$$

$$+ 2\, f\left(\left[1 - \frac{\sum_{n=3}^{4}(1-x_n^2)\sin y_n}{2 \sin\dfrac{y_3+y_4}{2}}\right]^{1/2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right) \leq$$

$$\leq 4 f\left(\left[1-\frac{(1-x_1'^2)\sin\frac{y_1+y_2}{2}+(1-x_2'^2)\sin\frac{y_3+y_4}{2}}{2\sin\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}}\right]^{1/2}, \frac{\sum_{n=1}^{4} y_n}{4}\right)=$$

$$= 4 f\left(\left[1-\frac{\sum_{n=1}^{4}(1-x_n^2)\sin y_n}{4\sin\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}}\right]^{1/2}, \frac{\sum_{n=1}^{4} y_n}{4}\right),$$

wobei zur Abkürzung

$$x_1' = \left[1-\frac{\sum_{n=1}^{2}(1-x_n^2)\sin y_n}{2\sin\frac{y_1+y_2}{2}}\right]^{1/2}, \quad x_2' = \left[1-\frac{\sum_{n=3}^{4}(1-x_n^2)\sin y_n}{2\sin\frac{y_3+y_4}{2}}\right]^{1/2}$$

(die x_i' liegen gleichfalls zwischen 0 und 1) gesetzt wurde. Mehrmalige Anwendung zeigt die Gültigkeit für $p = 2^m$.

Nimmt man an, daß die Behauptung für p richtig ist, so gilt dies auch für $p-1$. Setzt man nämlich

$$y_p = \frac{y_1 + \ldots + y_{p-1}}{p-1}, \quad x_p = \left[1-\frac{\sum_{n=1}^{p-1}(1-x_n^2)\sin y_n}{(p-1)\sin\frac{y_1+\ldots+y_{p-1}}{p-1}}\right]^{1/2} \tag{10}$$

(mit $x_1, \ldots, x_{p-1}; y_1, \ldots, y_{p-1}$ genügen auch x_p, y_p den Bedingungen $0 < x_i < 1$, $0 < y_i < \pi$), so ist $\frac{y_1+\ldots+y_p}{p} = y_p$, also

$$\sum_{n=1}^{p-1} f(x_n, y_n) + f(x_p, y_p) \leq p f\left(\left[1-\frac{\sum_{n=1}^{p}(1-x_n^2)\sin y_n}{p\sin\frac{y_1+\ldots+y_p}{p}}\right]^{1/2}, \frac{\sum_{n=1}^{p} y_n}{p}\right)=$$

$$= p f\left(\left[1-\frac{\sum_{n=1}^{p-1}(1-x_n^2)\sin y_n}{(p-1)\sin\frac{y_1+\ldots+y_{p-1}}{p-1}}\right]^{1/2}, \frac{\sum_{n=1}^{p-1} y_n}{p-1}\right),$$

wie sofort aus (10) folgt. Damit ist der Induktionsschluß vollständig.

Gilt in (9) Gleichheit nur für $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, dann auch in (8) nur für $x_1 = \ldots = x_p$, $y_1 = \ldots = y_p$.

Ist $y_1 = y_2 = y$, so lautet (9)

$$f(x_1, y) + f(x_2, y) \leq 2 f\left(\left[\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right]^{1/2}, y\right). \tag{11}$$

Wenn $f(x, y)$ als Funktion von x in $0 \leq x \leq 1$ stetig ist und für $0 < x < 1$ f_x, f_{xx} existieren, so ist

$$f_x \geq 0, \; f_{xx} \leq 0$$

eine hinreichende Bedingung für (11); ist $f_{xx} < 0$ oder $f_x > 0$, so gilt Gleichheit in (11) nur für $x_1 = x_2$. Dies folgt aus der Konkavität und Monotonie von f als Funktion von x. (11′) ist (ohne Gleichheit) für $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\left(x \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right)$ erfüllt und damit (7) für $p = 2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ bewiesen.

Es sei nun $0 < x_1', x_2' < 1$; $0 < y_1' < y_2' < \pi$. Wir bestimmen zwei Zahlen a, b so, daß

$$a\, y_n' + b = (1 - x_n'^2) \sin y_n' \qquad n = 1, 2.$$

Für $y_1' \leq y \leq y_2'$ ist $0 < a\, y + b < \sin y$; daher liegt die Kurve

$$x(y) = \sqrt{1 - \frac{a\, y + b}{\sin y}}, \tag{12}$$

die die Punkte (x_n', y_n') verbindet, zwischen y_1' und y_2' im Inneren des Rechtecks $R(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$. Es sei nun

$$g(y) \equiv f(x(y), y) = f\left(\left[1 - \frac{a\, y + b}{\sin y}\right]^{1/2}, \; y\right) \tag{13}$$

und $y_1' \leq y_1 < y_2 \leq y_2'$, ferner $x_n = x(y_n)$. Dann ist $f(x_n, y_n) = g(y_n)$ $(n = 1, 2)$ und

$$f\left(\left[1 - \frac{\sum_{n=1}^{2} (1 - x_n^2) \sin y_n}{2 \sin \dfrac{y_1 + y_2}{2}}\right]^{1/2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = f\left(\left[1 - \frac{a \dfrac{y_1 + y_2}{2} + b}{\sin \dfrac{y_1 + y_2}{2}}\right]^{1/2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Somit bedeutet (9) für die Funktion $g(y)$

$$\frac{g(y_1) + g(y_2)}{2} \leq g\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right), \tag{14}$$

d. h. $g(y)$ ist konkav in $\langle y_1', y_2' \rangle$. Existiert $g''(y)$ für $0 < y < 1$, so hat man als notwendige und hinreichende Bedingung für (9)

$$g''(y) \leq 0 \tag{15}$$

in (y_1', y_2'), und zwar für alle Punktepaare (x_n', y_n'). Dies und damit (9) ist gleichwertig mit (15) für alle a, b, y, für die gilt $0 < y < \pi$, $0 < a\,y + b < \sin y$. Gilt in (9) nur die Ungleichheit, dann auch in (15) und umgekehrt. Wir untersuchen nun, ob die Bedingung (15) für

$$f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\,(x \operatorname{tg} \frac{y}{2})$$

erfüllt ist. Es ist

$$g(y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{1 - \frac{a\,y + b}{\sin y}}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right); \tag{16}$$

für eine Funktion der Form

$$g(y) = \operatorname{arc\,tg}\,(\psi(y))$$

ist

$$g'' = \frac{(1 + \psi^2)\,\psi'' - 2\,\psi\,\psi'^2}{(1 + \psi^2)^2}.$$

Mit

$$\psi(y) = \sqrt{1 - \frac{a\,y + b}{\sin y}}\operatorname{tg}\frac{y}{2}$$

findet man

$$\begin{aligned}(1 + \psi^2)\,\psi'' - 2\,\psi\,\psi'^2 &= {}^1/_4\,[\sin^2 y - (a\,y + b)\sin y]^{-3/2}\,. \\ &\cdot \{(-{}^1/_2\,u^2 - {}^3/_2\,u^2\,v^4 + {}^3/_4\,u^3\,v + {}^1/_2\,u^3\,v^3 + {}^3/_4\,u^3\,v^5) + \qquad (17)\end{aligned}$$

$$+ a(2\,u\,v - 6\,u\,v^3 + u^2\,v^2 + 3\,u^2\,v^4) - a^2(2\,v^2 + \frac{4\,v^4}{1 + v^2} - 3\,u\,v^3)\},$$

wobei

$$u = a\,y + b,\ v = \operatorname{tg}\frac{y}{2}.$$

Bei festen u, v ist a willkürlich, da $g'' < 0$ sein soll für alle a, u, v mit $0 < u < \dfrac{2\,v}{1 + v^2}$. Wegen

$$2\,v^2 + \frac{4\,v^4}{1 + v^2} - 3\,u\,v^3 > 2\,v^2 + \frac{4\,v^4}{1 + v^2} - \frac{6\,v^4}{1 + v^2} > 0$$

besitzt der Ausdruck in der geschweiften Klammer, als Funktion von a, ein Maximum; es ergibt sich als

$$-2(2v^2+\frac{4v^4}{1+v^2}-3uv^3)^{-1}u^2v^4(u-\frac{2v}{1+v^2})\,(u-\frac{2}{v})$$

und dieser Ausdruck ist <0 wegen $u<\frac{2v}{1+v^2}<\frac{2}{v}$. Somit ist $g''(y)<0$ für $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}(x\operatorname{tg}\frac{y}{2})$ bewiesen, also (9) und daher nach dem Induktionsschluß auch (8) vollständig gezeigt.

Setzt man in (7) $h_1=\ldots=h_p=h$, $\varphi_1+\ldots+\varphi_p=2\pi$ und beachtet (5), so folgt

$$(1-h^2)\sum_{n=1}^{p}\sin\varphi_n\leq p\sin\frac{2\pi}{p}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}\right). \tag{18}$$

Die linke Seite gibt den doppelten Flächeninhalt $2f$ des anfangs erwähnten p-Ecks (Abb. 1), die rechte Seite ($=2F(\tau,p)$, vgl. 3') den doppelten Inhalt des einbeschriebenen regulären p-Ecks mit derselben Projektion τ. (18) drückt somit die Extremaleigenschaft

$$f\leq F(\tau,p) \tag{19}$$

des regulären p-Ecks aus. Gleichheit besteht nur für das reguläre p-Eck. In Verbindung mit (6) und (3) folgt die entsprechende Extremaleigenschaft (4) für den Inhalt $v=\frac{f\,.\,h}{3}$ der Pyramide. Auch hier ist das Gleichheitszeichen nur für das reguläre p-Eck richtig.

5. Der Mittelpunkt des Umkreises liege auf einer Seite des Polygons. Dann ist

$$\tau<\pi,\quad\sum_{n=1}^{p-1}\varphi_n=\pi$$

und

$$\sum_{n=1}^{p-1}\operatorname{arc\,tg}(h\operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2})=\frac{\pi-\tau}{2}.$$

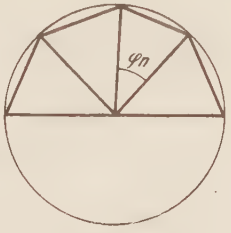

Abb. 2

Die Anwendung von (7) mit $h_1=\ldots=h_p=h$ ergibt

$$(1-h^2)\sum_{n=1}^{p-1}\sin\varphi_n\leq(p-1)\sin\frac{\pi}{p-1}\cdot\left(-1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right). \tag{20}$$

Gleichheit gilt nur für $\varphi_1=\ldots=\varphi_{p-1}=\frac{\pi}{p-1}$.

Da links wieder der doppelte Inhalt $2f$ des Polygons steht, zeigt (20), daß unter den Polygonen, deren Umkreismittelpunkt auf dem Rand liegt, und die die Projektion τ besitzen, jenes den größten Inhalt hat, für das $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{p-1} = \dfrac{\pi}{p-1}$ ist. Dieser maximale Inhalt ist kleiner als der des einbeschriebenen regulären p-Ecks mit demselben τ, m. a. W.

$$\frac{p-1}{2}\sin\frac{\pi}{p-1}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right)<\frac{p}{2}\sin\frac{2\pi}{p}\left(1-\right.$$
$$\left.-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}\right) \qquad (21)$$

für $p \geq 3,\ 0 < \tau \leq \pi$.

Beweis: Es sei (mit der Bezeichnung von Abschnitt 2)

$$F(\tau, p) = \frac{p}{2}\sin\frac{2\pi}{p}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}\right) \quad p>2,\ 0\leq\tau\leq 2\pi$$
$$= 0 \qquad\qquad p=2,\ 0\leq\tau\leq 2\pi$$

F ist stetig in jedem abgeschlossenen Rechteck $0 \leq \tau \leq 2\pi$, $2 \leq p \leq p_0$ und erfüllt im Inneren die Bedingungen

$$F_{pp} < 0,\ F_{\tau\tau}F_{pp} - F_{\tau p}^2 > 0.$$

Somit ist $F(\tau, p)$ konkav. (21) läßt sich nun in der Form

$$\tfrac{1}{2}F(2\tau, 2(p-1)) < F(\tau, p) \qquad (21')$$

schreiben. (21′) ist aber gleichbedeutend mit der Jensenschen Ungleichung für $F(\tau, p)$:

$$\tfrac{1}{2}F(0, 2) + \tfrac{1}{2}F(2\tau, 2p-2) < F(\tau, p) \text{ w.z.b.w.}$$

Analog (6) findet man eine Abschätzung von h nach oben.

Aus

$$\sum_{n=1}^{p-1} \operatorname{arc\,tg}\left(h\operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2}\right) = \frac{\pi-\tau}{2}$$

ergibt sich, da $\operatorname{arc\,tg}\left(h\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ konvex ist,

$$h \leq \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}; \qquad (22)$$

Gleichheit gilt für $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{p-1} = \dfrac{\pi}{p-1}$.

Wir zeigen noch, daß

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)} < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} \quad (0<\tau<\pi,\ p\geq 3). \tag{23}$$

Beweis: (23) ist gleichwertig mit

$$f(\tau) \equiv \operatorname{ctg}\frac{2\pi-\tau}{2p}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)} < f(0);$$

dazu genügt $f'(\tau) < 0$. Nun ist

$$f'(\tau) = {}^1/_4\,\frac{\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{\pi-\tau}{p-1} - \dfrac{1}{p-1}\sin\dfrac{2\pi-\tau}{p}}{\sin^2\dfrac{2\pi-\tau}{2p}\cos^2\dfrac{\pi-\tau}{2(p-1)}}.$$

Der Zähler ist für $\tau = 0$ negativ, also

$$(p-1)\sin\frac{\pi}{p-1} < p\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Denn $p\sin\dfrac{\pi}{p}$ nimmt monoton zu, somit

$$(p-1)\sin\frac{\pi}{p-1} < p\sin\frac{\pi}{p} \leq p\sin\frac{2\pi}{p} \text{ für } p \geq 3.$$

Die Ableitung des Zählers nach τ gibt

$$\frac{1}{p(p-1)}\left(\cos\frac{2\pi-\tau}{p} - \cos\frac{\pi-\tau}{p-1}\right) < 0,$$

da

$$0 < \frac{\pi-\tau}{p-1} < \frac{2\pi-\tau}{p} < \pi.$$

Daher ist $f'(\tau) < 0$, wie behauptet.

(20), (22) und (21), (23) ergeben folgende Abschätzung für das Volumen

$$v \leq \frac{p-1}{3}\cos^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right) < U(\tau, p), \tag{24}$$

also (4) ohne Gleichheitszeichen.

6. Der Mittelpunkt des Umkreises liege außerhalb des Polygons.

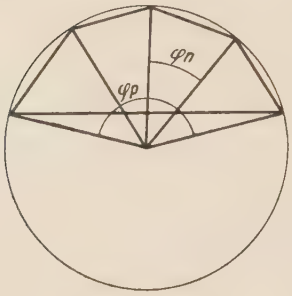

Abb. 3

Es ist

$$\tau < \pi, \sum_{n=1}^{p-1} \varphi_n = \varphi_p < \pi$$

und

$$\tau = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_p}{2}\right) - 2 \sum_{n=1}^{p-1} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right)$$

$$f = \frac{1-h^2}{2} \left(\sum_{n=1}^{p-1} \sin \varphi_n - \sin \varphi_p \right).$$

Es ist im Zusammenhang mit der zu beweisenden Umgleichung (4) interessant, daß für solche Polygone die entsprechende Ungleichung für den Flächeninhalt $f \leq F(\tau, p)$ von t nicht allgemein gilt, wie auch *Fejes Tóth* (l. c. S. 154f.) bemerkt. Man kann beweisen, daß die Menge der Flächeninhalte aller dieser p-Ecke mit der Projektion τ kein Maximum besitzt, sondern $\frac{p-1}{2} \sin \frac{\pi}{p-1}$ als nicht erreichte obere Grenze.

Da $F(\tau, p)$ eine monoton wachsende Funktion von τ, ferner $F(0, p)=0$ und $F(\pi, p) > \frac{p-1}{2} \sin \frac{\pi}{p-1}$ ist, gibt es genau eine Zahl τ^* zwischen 0 und π, die durch

$$\frac{p-1}{2} \sin \frac{\pi}{p-1} = F(\tau^*; p)$$

bestimmt ist und folgende Eigenschaft hat: Ist $\tau^* \leq \tau < \pi$, so ist der Flächeninhalt eines beliebigen p-Ecks mit der Zentralprojektion τ kleiner als der Inhalt des entsprechenden regulären Polygons. Dagegen gibt es bei $0 < \tau < \tau^*$ p-Ecke, die einen größeren Inhalt besitzen als das reguläre Polygon. Es existieren p-Ecke, deren Umkreismittelpunkte außerhalb liegen, für die $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{p-1} = \frac{\varphi_p}{p-1}$ ist und deren Inhalte der oberen Grenze $\frac{p-1}{2} \sin \frac{\pi}{p-1}$ beliebig nahe kommen.

Zunächst beweisen wir (4) für Polygone mit $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{p-1} = \frac{\varphi_p}{p-1}$. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Funktion

$$\psi(h,\varphi) \equiv \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - (p-1)\operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}\right) \tag{25}$$

für $0 \leq h \leq 1$, $0 < \varphi < \pi$, $p \geq 3$. ψ hat die Eigenschaften

$$\psi(0,\varphi) = \psi(1,\varphi) = 0,\ \psi(h,\varphi) > 0 \text{ für } 0 < h < 1$$

und besitzt bei festem φ als Funktion von h ein Maximum bei

$$\bar{h}(\varphi) = \left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - (p-1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}\left((p-1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}\right)}\right]^{1/2}. \tag{26}$$

$\psi(h,\varphi)$ nimmt monoton zu in $\langle 0, \bar{h}\rangle$ und nimmt ab in $\langle \bar{h}, 1\rangle$, so daß ψ jeden Wert zwischen 0 und $\psi(\bar{h}(\varphi),\varphi)$ an genau zwei Stellen h_1 in $(0, \bar{h})$ und h_2 in $(\bar{h}, 1)$ annimmt. Ferner gilt

$$0 < \bar{h}(\varphi) < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Letzteres ist nämlich gleichwertig mit

$$\omega(p-1) = \frac{(p-1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2(p-1)} + 3} > \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} + 3} = \omega(1). \tag{27}$$

$\omega'(p-1)$ hat das Vorzeichen von

$$\chi(x) \equiv x\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + 3\operatorname{tg} x - 2x\operatorname{tg}^2 x - 3x,\quad x = \frac{\varphi}{2(p-1)}$$

und $\chi'(x) = 4\operatorname{tg}^4 x + 4x\operatorname{tg}^5 x + 4\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - x) > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

somit $\chi(x) > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\omega'(p-1) > 0$ für $p \geq 2, 0 < \varphi < \pi$.

Also ist $\omega(p-1) > \omega(1)$.

Ferner ist

$$\lim_{\varphi\to 0}\bar{h}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \lim_{\varphi\to\pi}\bar{h}(\varphi) = 0.$$

Die Gleichung $\psi(h,\varphi) = \frac{\tau}{2}$ ist für mindestens ein φ lösbar, wenn $0 < \tau < \pi$ ist; es sei h so klein, daß

$$(p-1)\operatorname{arc\,tg}(h\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(p-1)})<\frac{\pi-\tau}{2}.$$

Dann wird mit diesem festen h

$$\lim_{\varphi\to\pi}\psi(h,\varphi)>\frac{\tau}{2},$$

während $\lim_{\varphi\to 0}\psi(h,\varphi)=0$. Daher gibt es eine Zahl $\varphi(0<\varphi<\pi)$, so daß

$$\psi(h,\varphi)=\frac{\tau}{2}.$$

$\psi(h,\varphi)$ nimmt als Funktion von φ monoton zu. Ist daher bei gegebenem τ die Gleichung $\psi(h,\varphi)=\frac{\tau}{2}$ lösbar, dann ist dies auch für alle größeren φ der Fall. Andererseits ist $\lim_{\varphi\to 0}\psi(\bar{h}(\varphi),\varphi)=0$, d. h. die Gleichung ist nicht für beliebig kleine Werte von φ lösbar. Es gibt somit einen minimalen Wert $\varphi_M(0<\varphi_M<\pi)$, für den die Gleichung lösbar ist und das zugehörige h ist $\bar{h}(\varphi_M)$, also

$$\psi(\bar{h}(\varphi_M),\varphi_M)=\frac{\tau}{2}.$$

Für $\varphi>\varphi_M$ ist $\psi(\bar{h}(\varphi_M),\varphi)>\frac{\tau}{2}$. Hält man φ fest, so gibt es also zwei Zahlen h_1, h_2, wobei $0<h_1<\bar{h}(\varphi)<h_2<1$, so daß

$$\psi(h_i,\varphi)=\frac{\tau}{2}\qquad i=1,2.$$

Durch

$$\psi(h,\varphi)=\frac{\tau}{2}$$

sind somit für $\varphi\geq\varphi_M$ zwei Funktionen $h_i=h_i(\varphi,\tau)$ definiert und es ist

$$h_1(\varphi_M,\tau)=h_2(\varphi_M,\tau)=\bar{h}(\varphi_M).$$

Man findet

$$\frac{dh_i}{d\varphi}=-\frac{h_i(1-h_i^2)}{2}\,\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2(p-1)}}{N_i}$$

wobei

$$N_i = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - (p-1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)} - h_i^2 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}\left[(p-1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}\right].$$

Wegen

$$h_1(\varphi, \tau) < \bar{h}(\varphi) < h_2(\varphi, \tau) \qquad (\varphi > \varphi_M)$$

ist

$$N_1 > 0,\ N_2 < 0,$$

so daß

$$\frac{d\,h_1}{d\,\varphi} < 0,\ \frac{d\,h_2}{d\,\varphi} > 0. \tag{28}$$

Wir betrachten nun die entsprechenden Funktionen

$$g_i(\varphi) \equiv h_i(1 - h_i^2)\,[(p-1)\sin\frac{\varphi}{p-1} - \sin\varphi].$$

Eine elementare Rechnung ergibt

$$g_i'(\varphi) = \frac{h_i(1-h_i^2)^2\,(u^2 - v^2)}{N_i(1+u^2)\,(1+v^2)}\,[u(3+v^2) - (p-1)\,v(3+u^2), \tag{29}$$

wobei

$$u = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ v = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2(p-1)}.$$

Da $u > v$ und nach (27)

$$\frac{(p-1)\,v}{3+v^2} > \frac{u}{3+u^2},$$

ist

$$\operatorname{sign} g_i'(\varphi) = -\operatorname{sign} N_i,$$

also

$$g_1(\varphi) < g_1(\varphi_M) = g_2(\varphi_M) < g_2(\varphi)$$

und weiter

$$g_i(\varphi) < \lim_{\varphi \to \pi} g_2(\varphi) \qquad i = 1, 2. \tag{30}$$

Da

$$\lim_{\varphi \to \pi} h_2(\varphi) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi - \tau}{2(p-1)}, \tag{31}$$

ist

$$g_i(\varphi) < (p-1)\sin\frac{\pi}{p-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\cdot$$
$$\cdot\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right).$$

Das Volumen einer Pyramide, für dessen Basispolygon $\varphi_1 = \ldots =$ $= \varphi_{p-1} = \dfrac{\varphi_p}{p-1}$ ist und das die Projektion τ besitzt, ist $v = {}^1/_6\, g_i(\varphi_p)$, woraus (24) ohne Gleichheitszeichen folgt w.z.b.w. Da $\lim\limits_{\varphi\to\pi} h_1(\varphi, \tau) = 0$, folgt aus (28) und (31), daß $\psi(h, \varphi) = \dfrac{\tau}{2}$ lösbar ist für

$$0 < h < \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}, \tag{32}$$

wenn $0 < \varphi < \pi$ sein soll, für $\varphi = \pi$ natürlich nur dann, wenn

$$h = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}$$

ist.

Auch die allgemeinere Gleichung

$$\psi(h; \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \equiv \operatorname{arc\,tg}\left(h\operatorname{tg}\frac{\varphi_p}{2}\right) - \sum_{n=1}^{p-1}\operatorname{arc\,tg}\left(h\operatorname{tg}\frac{\varphi_n}{2}\right) = \tau/2 \tag{33}$$

mit $\varphi_p \equiv \varphi_1 + \ldots + \varphi_{p-1}$, $\varphi_n \geq 0$, $0 < h < 1$ ist nur für die durch (32) gegebenen Werte von h lösbar, wenn $0 < \varphi_p < \pi$ sein soll. Denn wegen der Konvexität von $\operatorname{arc\,tg}\left(h\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ ist

$$\psi(h, \varphi_p) \geq \frac{\tau}{2},$$

also ist $\psi(h, \varphi) = \dfrac{\tau}{2}$ mit demselben h lösbar wie (33).

Wenn $\varphi_p = \pi$ ist, ist (33) lösbar für

$$0 < h \leq \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}.$$

Denn ist $h < \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\dfrac{\pi-\tau}{2(p-1)}$, so ist

$$\psi(h; \frac{\pi}{p-1}, \ldots, \frac{\pi}{p-1}) > \frac{\tau}{2};$$

andererseits ist

$$\lim_{\varphi_1 \to \pi} \psi(h; \varphi_1, \frac{\pi - \varphi_1}{p-2}, \ldots, \frac{\pi - \varphi_1}{p-2}) = 0,$$

daher ist (33) mit $\varphi_p = \pi$ für die angegebenen Werte h lösbar.

Es sei nun h fest, wobei (32) gelten soll. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_{p-2}$ die Menge der Punkte $P = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-2})$, für die es jeweils ein φ_{p-1} gibt, so daß (33) erfüllt ist. Dabei sei

$$\varphi_p \leq \pi, \ \varphi_n \geq 0 \qquad (u = 1, \ldots, p-1).$$

Hält man $P = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-2})$ fest, so ist ψ eine monoton wachsende Funktion von φ_{p-1} und daher φ_{p-1} durch P eindeutig bestimmt. Die Punkte von $\mathfrak{M}_{p-2}$ sind charakterisiert durch

$$0 \leq \varphi_n, \ \varphi_1 + \ldots + \varphi_{p-2} \leq \pi,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \ldots + \varphi_{p-2}}{2}\right) - \sum_{n=1}^{p-2} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right) \leq \frac{\tau}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{p-2} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\pi - (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{p-2})}{2}\right) \geq \frac{\tau}{2}. \quad (34)$$

Gilt in keiner der vier Relationen das Gleichheitszeichen, so ist P innerer Punkt von $\mathfrak{M}_{p-2}$. Speziell ist der Punkt, der zu $\varphi_n = \frac{\varphi_p}{p-1}$ $(n = 1, \ldots, p-2)$ gehört, wobei φ_p aus

$$\psi(h, \varphi_p) = \frac{\tau}{2}$$

ermittelt wird, ein innerer Punkt.

Aus (33) folgt, daß φ_{p-1} auf $\mathfrak{M}_{p-2}$ stetig ist. Deshalb ist auch

$$G(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-2}, \varphi_{p-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-2})) \equiv \sum_{n=1}^{p-1} \sin \varphi_n - \sin \varphi_p$$

auf $\mathfrak{M}_{p-2}$ stetig. G besitzt somit in $\mathfrak{M}_{p-2}$ ein Maximum, das entweder im Inneren oder auf dem Rand liegen kann. Nehmen wir an, das Maximum liege im Inneren, so gilt dafür notwendig, wenn wir (33) in der Form

$$H(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}) \equiv \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \ldots + \varphi_{p-1}}{2}\right) - \sum_{n=1}^{p-1} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right) - \frac{\tau}{2} = 0$$

schreiben

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_n} + \lambda \frac{\partial H}{\partial \varphi_n} = 0, \qquad n = 1, \ldots, p-1.$$

Das gibt, wenn wir den Fall $\varphi_p = \pi$ zunächst ausschließen,

$$\cos\varphi_n - \cos\varphi_p + \lambda \frac{h(1-h^2)}{2} \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_p}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi_n}{2}}{\left(1+h^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_n}{2}\right)\left(1+h^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_p}{2}\right)} = 0,$$

$$n = 1, \ldots, p-1$$

und daraus folgt

$$\frac{1+h^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1+h^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_2}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_2}{2}} = \ldots = \frac{1+h^2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_{p-1}}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_{p-1}}{2}}$$

also

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{p-1} = \frac{\varphi_p}{p-1}. \tag{35}$$

Somit gilt für das Volumen v der Pyramide

$$v = \frac{h(1-h^2)}{6}\left(\sum_{n=1}^{p-1}\sin\varphi_n' - \sin\varphi_p'\right) \leq \frac{h(1-h^2)}{6}\left[(p-1)\sin\frac{\varphi_p}{p-1} - \sin\varphi_p\right].$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wurde bereits vorhin nach oben abgeschätzt, so daß wieder (24) ohne Gleichheit gilt:

$$v < \frac{p-1}{3}\cos^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right) < U(\tau, p). \tag{36}$$

Der Fall $\varphi_p = \pi$, der oben ausgeschlossen wurde, wurde in 5. behandelt; das Ergebnis ist in (24) enthalten.

Besitzt G ein Maximum auf dem Rand von $\mathfrak{M}_{p-2}$, so muß für diesen Punkt P in mindestens einer der vier Relationen (34) Gleichheit eintreten. Dies ist nur möglich, wenn $\varphi_p = \pi$ oder mindestens ein $\varphi_n = 0$ $(n = 1, \ldots, p-1)$ ist. Im letzten Fall hat das Basispolygon höchstens $p-1$ Seiten und man braucht nur den Schluß für $p-1$ zu wiederholen usw. Ist also $\varphi_p < \pi$, so ist (36) allgemein bewiesen, wenn man noch zeigen kann, daß die darin auftretende Funktion

$$\frac{p-1}{3}\cos^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2(p-1)}\operatorname{tg}^2\frac{\pi-\tau}{2(p-1)}\right)$$

für $p \geq 3$, $0 < \tau < \pi$ mit p monoton wächst. Dieser Ausdruck ist aber

$$\tfrac{1}{2}\,U(2\tau, 2(p-1))$$

und nimmt daher, wie in 2. gezeigt wurde, mit p zu. Somit ist (36) für $\varphi_p < \pi$ allgemein nachgewiesen, also in den Abschnitten 4, 5, 6 der Beweis für die Ungleichung (4) erbracht. Gleichheit gilt in (4) nur für das der Kugel einbeschriebene reguläre p-Eck.

Wie *Fejes Tóth* bemerkt[10], gilt für $p \geq 3$

$$U(\tau, p) \leq U(\pi, p) \qquad \tau \geq \pi \tag{37}$$

$$U(\tau_1, p) \leq U(\tau_2, p) \qquad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Beweis: Für $\tau \geq \pi$ ist $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi-\tau}{2p} \leq \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}$, also

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} \leq \operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} = \tfrac{1}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2p}\right) < \tfrac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und daher weiter

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}\right) \leq \operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2p}\right).$$

Das ist nach (2) der erste Teil der Behauptung. Gleichheit gilt nur für $\tau = \pi$.

Für

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist $U(\tau, p)$ eine monoton zunehmende Funktion von τ. Nun ist, wie in 2. gezeigt wurde,

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{2p} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau}{6} \geq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

wenn $\tau \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Allgemeiner ist

$$U(\tau_1, p) \leq U(\tau_2, p) \qquad 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2,$$

[10] L. c. S. 129.

falls

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}\frac{2\pi-\tau_2}{2p}\geq\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{37'}$$

gilt. Gleichheit tritt nur für $\tau_1=\tau_2$ ein.

Ein Polyeder mit f Flächen, das in der Einheitskugel liegt und den Kugelmittelpunkt im Inneren enthält (s. 1.), setzt sich aus f Pyramiden zusammen, deren Basispolygone p_i-Ecke mit den Projektionen τ_i sind; ihre Inhalte seien v_i. Dann gilt

$$\sum_i p_i=2k,\quad \sum_i \tau_i=4\pi.$$

Wenn man jedes $\tau_i>\pi$ durch π ersetzt, so erhält man neue Werte $\tau_i'\leq\pi$ $(i=1,\ldots,f)$ und es ist

$$\sum_i \tau_i'\leq 4\pi.$$

Damit folgt wegen der in 2. bewiesenen Konkavität von $U(\tau,p)$ für $3\leq p\leq p_0=\operatorname{Max}(p_i)$, $0\leq\tau\leq\pi$ und wegen (4), (37)

$$V=\sum_i v_i\leq\sum_i U(\tau_i,p_i)\leq\sum U(\tau_i',p_i)\leq$$
$$\leq f\,U\left(\frac{\sum\tau_i'}{f},\frac{2k}{f}\right)\leq f\,U\left(\frac{4\pi}{f},\frac{2k}{f}\right) \tag{38}$$

wenn die zweite Ungleichung (37) zutrifft, also für $f\geq 8$ oder allgemeiner nach (37'), wenn

$$\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi e}{2k}\leq\sqrt{3} \tag{39}$$

ist.

(38) gibt eben die zu beweisende Ungleichung (1). Gleichheit kann nur dann eintreten, wenn alle Seitenflächen regulär und der Kugel einbeschrieben sind, alle $\tau_i\leq\pi$ sind und $\tau_1=\ldots=\tau_f=\frac{4\pi}{f}$ sowie $p_1=\ldots=p_f$ ist.

Das ist aber nur für reguläre Polyeder erfüllt, deren Umkugel die Einheitskugel ist.

Es bleiben noch die Polyeder mit $4\leq f\leq 7$ zu untersuchen. Zunächst stellt man leicht fest, daß $U(\tau,p)$ bei festem p eine konkave Funktion von τ allein, und zwar im ganzen Bereich $0\leq\tau\leq 2\pi$ ist. Für Dreieckpolyeder ($p_i=3$) ist somit das Ersetzen der $\tau_i>\pi$ durch π

unnötig und man erhält unmittelbar (38) und daher auch (1). Das Gleichheitszeichen gilt nur für das reguläre Tetraeder. Zu den Dreieckpolyedern gehören die Polyeder mit $f = 4$ (Tetraeder) und $f = 6$, $k = 9$ (dreiseitige Doppelpyramide). Auch für die Polyeder $f = 6$, $k = 12$ und $f = 7$, $k \geq 12$ ist (1) richtig, da hier (39) erfüllt ist. Gleichheit tritt nur für den Würfel ein. Die übrigen Polyeder mit $5 \leq f \leq 7$, d. s. $f = 5$, $k = 8, 9$; $f = 6$, $k = 10, 11$; $f = 7, k = 11$, genügen nicht der Bedingung (39).

Untersuchen wir etwa die vierseitige Pyramide ($f = 5$, $k = 8$). Man kann annehmen, daß die Spitze auf der Kugelfläche liegt und die Tangentialebene in diesem Punkt parallel zur Basisebene ist, da man sonst V vergrößern kann. Aus demselben Grund braucht man nur Pyramiden zu betrachten, deren Basis ein der Kugel einbeschriebenes Quadrat ist. Die größte derartige Pyramide hat aber den Inhalt $V = \frac{64}{81}$, was kleiner als die linke Seite von (1) für $e = f = 5$, $k = 8$ ist. Ebenso hat die größte in der Einheitskugel enthaltene fünfseitige Pyramide ($e = f = 6$, $k = 10$) den Inhalt $\frac{80}{81} \sin \frac{2\pi}{5}$, womit (1) erfüllt ist. Die weiteren Fälle dürften sich auf ähnliche Weise durch elementargeometrische Überlegungen erledigen lassen.

Es ist noch zu zeigen, daß für Polyeder, bei denen der Mittelpunkt der Einheitskugel auf dem Rand des Polyeders liegt, in (1) das Gleichheitszeichen ausgeschlossen ist.

Der Kugelmittelpunkt liege etwa im Inneren einer Seitenfläche mit p' Seiten. Man kann zunächst den Schluß wie in (38) führen und findet, daß (1) gilt, und zwar ohne Gleichheit, wenn (39) erfüllt ist, da man das zu dieser Seitenfläche gehörige $\tau = 2\pi$ durch $\tau' = \pi$ zu ersetzen hat. Somit bleiben noch die Polyeder mit $f = 5$, $k = 8, 9$; $f = 6$, $k = 9, 10, 11$; $f = 7$, $k = 11$ zu betrachten. Zu diesem Zweck ändern wir (38) etwas ab, indem wir, was durch Σ' bezeichnet wird, die den Kugelmittelpunkt enthaltende Seitenfläche weglassen:

$$V = \Sigma' v \leq \Sigma' U(\tau, p) \leq \Sigma' U(\tau', p) \leq$$

$$\leq (f-1)\, U\left(\frac{\Sigma' \tau'}{f-1}, \frac{2k-p'}{f-1}\right) \leq (f-1)\, U\left(\frac{2\pi}{f-1}, \frac{2k-p'}{f-1}\right)$$

$$\leq (f-1)\, U\left(\frac{2\pi}{f-1}, \frac{2k-3}{f-1}\right), \qquad (38')$$

da $\frac{2\pi}{f-1} \leq \frac{\pi}{2}$ und $p' \geq 3$. Für die vorhin erwähnten Ausnahmen prüft man aber leicht nach, daß

$$(f-1)\, U\left(\frac{2\pi}{f-1}, \frac{2k-3}{f-1}\right) < f\, U\left(\frac{4\pi}{f}, \frac{2k}{f}\right)$$

ist, woraus die Behauptung folgt. Analog überlegt man, daß (1) ohne Gleichheit gilt, wenn der Kugelmittelpunkt auf einer Kante oder in einem Eckpunkt des Polyeders liegt. Damit ist der Beweis von (1) erbracht.

Über Klassifizierung homotoper Abbildungen

Von

Josef Weier, Fulda

(Eingelangt am 9. Dezember 1955)

Sind E_1 der eindimensionale Euklidische Raum und F die Menge derjenigen stetigen Abbildungen f von E_1 in sich, die die Ungleichung $p \neq f(p)$ für alle Punkte p aus E_1 erfüllen, so entsteht eine Einteilung von F in genau zwei Klassen durch die Festsetzung: die Abbildungen f', f'' aus F gehören zur gleichen Klasse, falls von τ stetig abhängende stetige Abbildungen f^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, aus F existieren mit $f^0 = f$ und $f^1 = f'$.

Seien nun E irgendein Euklidischer Raum, P eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit in E, die Dimension von P größer als 1 und g, g' zur Identität homotope Abbildungen von P in sich, $p \neq g(p)$ und $p \neq g'(p)$ für alle Punkte p aus P. Dann erhebt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen über P von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, von P in sich existieren derart, daß $g^0 = g$, $g^1 = g'$ und $p \neq g^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$ gilt.

Die folgenden Seiten beweisen einen Satz, der das vorgenannte Problem auf eine einfachere Aufgabe zurückführt. Wir werden nachweisen: *es gibt eine g in g' überführende Deformation $(h^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ so beschaffen, daß, wenn A die Menge aller (p, τ) mit $p = h^\tau(p)$ bedeutet, A aus endlich vielen paarweis zueinander fremden eindimensionalen Sphären $B_1, \ldots, B_m$ besteht oder leer ist.*

Hierauf verbleibt nur noch zu untersuchen, wann sich die B_i beseitigen lassen. Diese Aufgabe, deren Erörterung eine Diskussion der eindimensionalen und zweidimensionalen Homotopiegruppen von P notwendig macht, wird im folgenden nicht mehr gelöst. Ebenso findet ein einfacheres Problem, die Frage, wann sich die m Sphären B_i auf eine einzige Sphäre reduzieren lassen, in dieser Arbeit keine Behandlung mehr.

1. Freie Eckpunkte

Wie oben bedeute E einen Euklidischen Raum und P eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit in E mit dim $P > 1$. Die weiterhin auftretenden „Simplexe" sind Euklidisch und offen, „1-Sphären" topologische Bilder einer Kreislinie. Sind n die Dimension von E, E_{n+1} der $(n+1)$-dimensionale Euklidische Raum, $p = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ein Punkt aus E und τ irgendeine Zahl, so bezeichnen wir den Punkt $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau)$ aus E_{n+1} auch mit (p, τ). Für zwei im selben Euklidischen Raum gelegene Punkte a und b bezeichnet $\varrho(a, b)$ ihren Euklidischen Abstand.

Sind $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von P in sich und hat für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte, so bezeichnen wir F als „*endlich*", falls gilt: die Menge S aller (p, τ) mit $p = f^\tau(p)$ ist leer oder ein endliches homogenes eindimensionales Polyeder. Wir nennen S das „*singuläre Gebilde*" von F. Sei $S \neq 0$. Eine in S offene Menge A heiße „*Singularität*" von F, wenn sie die folgenden Eigenschaften I bis III hat. I. Es ist A das topologische Bild eines 1-Simplexes. II. Sind (p_1, τ_1) und (p_2, τ_2) Punkte aus A mit $\tau_1 = \tau_2$, so ist $p_1 = p_2$. III. Wenn A' eine in S offene Menge $\supset A$ derart, daß I und II bei Ersetzung von A durch A' richtig bleiben, so ist $A = A'$.

Die Menge S liegt in E_{n+1}. Ist $q = (\tau_1, \ldots, \tau_{n+1})$ ein Punkt aus S, so gilt $0 \leq \tau_{n+1} \leq 1$. Zu der Singularität A von F gibt es eine ganze Zahl ζ, den „*Grad*" von A bei F, derart, daß, wenn (p, τ) ein Punkt aus A ist, p bei f^τ den Index ζ hat. Die beiden Punkte der Menge $\overline{A} - A$ mögen die „*Eckpunkte*" von A heißen. Ist (q, α) ein Eckpunkt von A und die Menge $A + (q, \alpha)$ in S offen, so heiße (q, α) ein „*freier Eckpunkt*" von F.

In meiner Arbeit: „Endliche Abbildungsscharen in kompakten topologischen Mannigfaltigkeiten"[1] findet man bewiesen: Sind f, f' homotope Abbildungen von P in sich und hat f wie f' höchstens endlich viele Fixpunkte, so gibt es eine f in f' überführende endliche Abbildungsschar.

Über Zerlegung eindimensionaler Singularitäten gilt folgender Satz, dessen Beweis wir hier übergehen, um Platz zu sparen. Sind U eine Umgebung von A, jede Singularität $\neq A$ von F zu $\overline{U}$ fremd und $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ganze Zahlen mit $\Sigma \zeta_i = \zeta$, so gibt es eine endliche Abbildungsschar F' in P mit den Eigenschaften: für $(p, \tau) \in U$ ist $F(p, \tau) = F'(p, \tau)$; jede Singularität von F' ist entweder in U gelegen oder zu $\overline{U}$ fremd; die

[1] Monatsh. f. Mathem. 59, 1—21 (1955).

in U liegenden Singularitäten von F lassen sich derart mit $B_1, \ldots, B_m$ bezeichnen, daß für $i = 1, \ldots, m$ erstens A, B_i die gleichen Eckpunkte haben und zweitens der Grad von B_i bei F' gleich ζ_i ist.

Wir wollen nachweisen:

Satz. *Sind* $F = (f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ *eine endliche Abbildungsschar in* P, A *eine Singularität von* F, (q, α) *ein freier Eckpunkt von* A *und* $0 < \alpha < 1$, *so hat* A *bei* F *den Grad Null.*

Beweis. Wir bezeichnen die Singularitäten von F derart mit $A_1, \ldots, A_r$, daß $A_1 = A$. Dann gibt es, wie aus der Erklärung eines freien Eckpunktes folgt, eine positive Zahl β, so daß

$$\varrho((q, \alpha), A_2 + \ldots + A_r) > \beta. \tag{1}$$

Seien nun V eine in P offene Menge und γ eine positive Zahl mit $q \in V$ und der Eigenschaft, daß die Menge W aller (p, τ) mit $p \in V$ und $|\alpha - \tau| < \gamma$ einen Durchmesser $< \beta$ hat. Dann ist

$$\overline{W} \,.\, (\overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_r) = 0, \tag{2}$$

wie aus (1) folgt.

Der Erklärung einer Singularität zufolge gibt es eine Zahl α_1 mit $\alpha < \alpha_1 \leq 1$ und von τ stetig abhängende Punkte a^τ, $\alpha < \tau < \alpha_1$, aus P derart, daß A die Menge der Punkte (a^τ, τ) mit $\alpha < \tau < \alpha_1$ ist.

Weiter gibt es wegen $\lim a^\tau = q$, τ gegen α, und $q \in V$ eine positive Zahl δ mit $\alpha + \delta < \alpha_1$, so daß $a^\tau \in V$ für $\alpha < \tau \leq \alpha + \delta$.

Sei hierauf ε eine positive Zahl mit $\varepsilon < \gamma$, $\alpha - \varepsilon > 0$, $\alpha + \varepsilon < \alpha_1$ und $\varepsilon < \delta$. Dann wollen wir *erstens* zeigen, daß für alle Zahlen τ mit $\alpha - \varepsilon \leq \tau < \alpha$ auf $\overline{V}$ kein Fixpunkt von f^τ liegt. Zum Beweis bedeute τ_1 eine feste Zahl mit $\alpha - \varepsilon \leq \tau_1 < \alpha$ und q_1 einen bestimmten Punkt aus $\overline{V}$. Dann ist $(q_1, \tau_1) \in \overline{A}$, da $\alpha \leq \tau \leq \alpha_1$ für jeden Punkt (p, τ) aus $\overline{A}$ und $\tau_1 < \alpha$. Wegen $\varepsilon < \gamma$ sowie $\alpha - \varepsilon \leq \tau_1 < \alpha$ und $q_1 \in \overline{V}$ ist $(q_1, \tau_1) \in \overline{W}$, nach (2) daher (q_1, τ_1) nicht in $\overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_r$ gelegen. Somit ist $(q_1, \tau_1) \in \Sigma \overline{A}_i$, was bereits die Behauptung darstellt.

Wir wollen *zweitens* nachweisen, daß für alle Zahlen τ mit $\alpha < \tau \leq \alpha + \varepsilon$ der Punkt a^τ in V liegt und der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\overline{V}$ ist. Zunächst ist $a^\tau \in V$ für $\alpha < \tau \leq \alpha + \varepsilon$, da $\varepsilon < \delta$. Sei τ_2 eine feste Zahl mit $\alpha < \tau_2 \leq \alpha + \varepsilon$ und q_2 ein Punkt aus $\overline{V}$ mit $q_2 = f^{\tau_2}(q_2)$. Dann ergibt sich wie im ersten Fall, daß $(q_2, \tau_2) \in W$ und daher $(q_2, \tau_2) \in \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_r$. Somit ist $(q_2, \tau_2) \in \overline{A}_1$. Für jeden Punkt (p, τ) der Menge $\overline{A}_1 - A_1$ gilt $\tau = \alpha$ oder $\tau = \alpha_1$. Nun ist $\alpha < \tau_2 \leq \alpha + \varepsilon < \alpha_1$, also $(q_2, \tau_2) \in A_1$. Hieraus folgt $q_2 = a^{\tau_2}$, was zu zeigen war.

Für $\alpha - \varepsilon \leq \tau \leq \alpha + \varepsilon$ bezeichne g^τ die Abbildung $f^\tau \mid \overline{V}$. Dann gilt: für $\alpha - \varepsilon \leq \tau < \alpha$ hat g^τ keinen Fixpunkt, der Punkt q ist der einzige Fixpunkt von g^α, für $\alpha < \tau \leq \alpha + \varepsilon$ ist $a^\tau \in V$ der einzige Fixpunkt von g^τ. Nach einem bekannten Satz über den Poincaré-Brouwerschen Index[2] hat daher a^τ bei g^τ den Index Null. Mithin: der Grad von A bei F ist Null.

2. Hilfssätze

Im folgenden werden einige bekannte Eigenschaften des Indexes zur Herleitung von Hilfssätzen verwandt, die im letzten Abschnitt Anwendung finden. Für alle Hilfssätze bedeuten E einen Euklidischen Raum einer Dimension > 1 und V eine in E offene Vollkugel.

Hilfssatz 1. *Seien a ein Punkt aus V und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in E mit den Eigenschaften: der einzige Fixpunkt von f^0 ist der Punkt a; in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ oder $p \in \overline{V}$ und $\tau = 1$, ist $p \neq f^\tau(p)$. Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E, über die gilt: in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}$ und $\tau = 0, 1$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, ist $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; in allen $(p, \tau) \neq (a, 0)$ ist $p \neq g^\tau(p)$.*

Beweis. Bezeichne W die Menge aller (p, τ) mit $p \in V$ und $0 < \tau < 1$. Dann existieren eine offene Vollkugel X mit $\dim X = (\dim V) + 1$ und eine topologische Abbildung α von $\overline{W}$ auf $\overline{X}$ mit $\alpha(\overline{W} - W) = \overline{X} - X$.

Seien b das Bild von $(a, 0)$ bei α und $\beta(q)$ für jeden Punkt q aus $\overline{X} - b$ die Projektion von q auf $\overline{X} - X$ aus b, ferner

$$\gamma(p, \tau) = \alpha^{-1} \beta \alpha(p, \tau)$$

in allen Punkten (p, τ) aus $\overline{W} - (a, 0)$. Ist $r = (p, \tau)$ ein Punkt aus $\overline{W}$, so bezeichne $\delta(r)$ den Punkt p aus $\overline{V}$. Den Punkt $(a, 0)$ aus $\overline{W}$ nennen wir auch a^0. Statt $f^\tau(p)$ schreiben wir auch $f(p, \tau)$.

Die Abbildung γ ist stetig. Sie bildet $\overline{W} - a^0$ derart auf $(\overline{W} - W) - a^0$ ab, daß $\gamma(r) = r$ in allen Punkten $r = (p, \tau)$ aus $(\overline{W} - W) - a^0$. Durch

$$h(p, \tau) = p + (f\gamma(p, \tau) - \delta\gamma(p, \tau)),$$

(p, τ) ein Punkt aus $\overline{W} - a^0$, wird eine stetige Abbildung h von $\overline{W} - a^0$ in E bestimmt. Es ist

---

[2] Sur les courbes définies par les équations differentielles, Journal de Mathem. 1, 167—244 (1885) und 2, 151—217 (1886).
Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, Mathem. Ann. 71, 320—327 (1912).

$$h(p, \tau) = f(p, \tau) \text{ für } (p, \tau) \in (\overline{W} - W) - a^0. \tag{3}$$

Denn für jeden Punkt der letzteren Menge gilt $\gamma(p, \tau) = (p, \tau)$. Weiter ist

$$p \neq h(p, \tau) \text{ für } (p, \tau) \in \overline{W} - a^0. \tag{4}$$

Es ist nämlich für $(p, \tau) \in \overline{W} - a^0$ der Punkt $\gamma(p, \tau)$, der auch (p_1, τ_1) heiße, in $(\overline{W} - W) - a^0$ gelegen. Also ist $f(p_1, \tau_1) \neq p_1$, daher $f\gamma(p, \tau) \neq \neq \delta\gamma(p, \tau)$ und folglich $p \neq h(p, \tau)$.

Mit Hilfe von h läßt sich $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ leicht bestimmen:

Man kann annehmen, a sei der Mittelpunkt und 1 der Radius von V. Für $0 < \sigma \leq 1$ seien V^σ die offene Vollkugel in E mit a als Mittelpunkt und σ als Radius, weiter

$$\varepsilon(\sigma) = \max (\varrho(p, f^0(p)), p \in \overline{V}^\sigma)$$

und Y^σ die Menge aller Punkte (p, τ) aus $\overline{W}$ mit $p \in V^\sigma$ und $0 \leq \tau < \sigma$.

Bezeichne ζ eine stetige Abbildung von $\overline{W}$ in das abgeschlossene Intervall zwischen 0 und 1, so daß $\zeta(p, \tau) = 1$ für $(p, \tau) \in \overline{Y}^{1/2}$ und $\zeta(p, \tau) = 0$ für $(p, \tau) \in (\overline{W} - W) - Y^1$.

Hierauf setzen wir $g^0(a) = a$. Sind (p, τ) ein Punkt aus $\overline{W} - a^0$ und die Zahl σ durch $(p, \tau) \in \overline{Y}^\sigma - Y^\sigma$ bestimmt, so sei

$$g^\tau(p) = h(p, \tau), \text{ wenn } \varrho(p, h(p, \tau)) \leq \varepsilon(\sigma).$$

Nun bedeute (p, τ) einen Punkt aus $\overline{W} - a^0$, so daß, wenn wieder σ durch $(p, \tau) \in \overline{Y}^\sigma - Y^\sigma$ festgelegt, die Zahl $\varrho(p, h(p, \tau))$, die wir auch $\eta(p, \tau)$ nennen, $> \varepsilon(\sigma)$ ist. Hier bezeichne $g^\tau(p)$ jenen Punkt auf dem Halbstrahl aus p durch $h(p, \tau)$, der von p den Abstand

$$\zeta(p, \tau)\, \varepsilon(\sigma) + (1 - \zeta(p, \tau))\, \eta(p, \tau)$$

hat.

Offenbar ist die durch $g(p, \tau) = g^\tau(p)$, $(p, \tau) \in \overline{W}$, bestimmte Abbildung g auf $\overline{W} - a^0$ stetig. Wie aus $\lim \varepsilon(\sigma) = 0$, σ gegen 0, und $\zeta(p, \tau) = 1$, $(p, \tau) \in \overline{Y}^{1/2}$, folgt, ist g aber auch im Punkt a^0 stetig.

Wegen (4) ist $p \neq g(p, \tau)$ in allen (p, τ) aus $\overline{W} - a^0$. Verbleibt zu zeigen, daß in allen Punkten $(p, \tau) \in \overline{W} - W$ die Gleichung $g(p, \tau) = = f(p, \tau)$ gilt. Zum Beweis sei *erstens* (p, τ) ein Punkt aus $(\overline{W} - W) - Y^1$. Dann ist $\zeta(p, \tau) = 0$, also $g(p, \tau) = h(p, \tau)$, wegen (3) daher weiter $g(p, \tau) = f(p, \tau)$. *Zweitens* liege (p, τ) in $(\overline{W} - W) \cdot \overline{Y}^1 - a^0$. Dann ist $p \in \overline{V} - a$ und $\tau = 0$. Wir bestimmen σ durch $(p, \tau) \in \overline{Y}^\sigma - Y^\sigma$. Wegen $h(p, \tau) = f^0(p)$ und $p \in \overline{V}^\sigma$ ist $\varrho(p, h(p, \tau) \leq \varepsilon(\sigma)$, daher $g(p, \tau) = = h(p, \tau)$, somit $g(p, \tau) = f(p, \tau)$ wegen (3) wie im ersten Fall.

Hilfssatz 2. *Seien a ein Punkt aus V und $a_1, \ldots, a_m$ paarweis verschiedene Punkte aus V, ferner $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in E mit den Eigenschaften: die Punkte a_i sind die Fixpunkte von f^0, der Punkt a ist der einzige Fixpunkt von f^1, in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $p \neq f^\tau(p)$. Dann gibt es von τ stetig abhängende Punkte*

$$a_i^\tau, i = 1, \ldots, m \text{ und } 0 \leq \tau \leq 1,$$

aus V und eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E, über die gilt: in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}$ und $\tau = 0, 1$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, ist $f^\tau(p) = g^\tau(p)$; für $i = 1, \ldots, m$ ist $a_i^0 = a_i$ und $a_i^1 = a$; für $0 < \tau < 1$ sind die Punkte $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von g^τ.

Beweis. Seien V^0 die Menge aller Punkte $(p, 0)$ mit $p \in V$, ferner W die Menge aller Punkte (p, τ) mit $p \in V$ und $0 < \tau < 1$, a^1 der Punkt $(a, 1)$, X die konvexe Hülle der Menge $V^0 + a^1$ und $f(p, \tau) = f^\tau(p)$ in allen (p, τ).

Den Punkt $g(p, \tau) = g^\tau(p)$ erklären wir *erstens* auf $\overline{W} - W$ durch $g(p, \tau) = f(p, \tau)$. Wir wollen *zweitens* $g(p, \tau)$ auf der Menge $\overline{X} - (\overline{V}^0 + a^1)$ definieren. Seien zu diesem Ende $q_1 = (p_1, \tau_1)$ ein bestimmter Punkt aus der letzteren Menge, $q_2 = (p_2, \tau_2)$ die Projektion von q_1 auf $\overline{V}^0$ aus a^1 und ζ die Zahl $\varrho(a^1, q_1)/\varrho(a^1, q_2)$, schließlich

$$g(p_1, \tau_1) = p_1 + \zeta(f(p_2, \tau_2) - p_2)).$$

Hierauf ist $p \neq g(p, \tau)$ in allen Punkten (p, τ) aus $\overline{X}$, die von den Punkten

$$a_i^\tau = (1 - \tau)\, a_i + \tau\, a, \quad i = 1, \ldots, m \text{ und } 0 \leq \tau \leq 1,$$

verschieden. Im besonderen ist $p \neq g(p, \tau)$ in allen (p, τ) aus $(\overline{X} - X) - a^1$.

Die *verbleibende Aufgabe*, g derart stetig über $W - \overline{X}$ fortzusetzen, daß $p \neq g(p, \tau)$ in allen Punkten dieser Menge, läßt sich leicht auf Hilfssatz 1 zurückführen.

Hilfssatz 3. *Seien a ein Punkt aus V, f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in E, a der einzige Fixpunkt von f und der Index von a bei f Null. Dann gibt es eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E mit $g^0 = f$ und der Eigenschaft: jede der Abbildungen $g^\tau, 0 < \tau \leq 1$, ist fixpunktfrei.*

Beweis. Da der Index von a bei f Null ist, gibt es eine stetige Abbildung f' von $\overline{V}$ in E, die keinen Fixpunkt hat und auf $\overline{V} - V$ mit f übereinstimmt. Sind p ein Punkt aus $\overline{V}$ und τ eine Zahl mit $0 \leq \tau \leq 1$,

so bezeichne $f^\tau(p)$ den Punkt $(1-\tau)\,f(p)+\tau\,f'(p)$. Hierauf ergibt sich Hilfssatz 3, wenn man Hilfssatz 1 auf die Abbildungsschar $(f^\tau, 0\leq\tau\leq 1)$ anwendet.

Hilfssatz 4. *Seien $a_1, \ldots, a_m$ paarweis verschiedene Punkte in V, a ein weiterer Punkt aus V, f eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in E und $a_1, \ldots, a_m$ die Fixpunkte von f. Dann gibt es von τ stetig abhängige Punkte*

$$a_i^\tau,\ i=1,\ldots,m \text{ und } 0\leq\tau\leq 1,$$

aus V und eine Schar $(g^\tau, 0\leq\tau\leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E mit den Eigenschaften: $a_i^0=a_i$ und $a_i^1=a$ für alle i; $g^0=f$; für $0<\tau<1$ sind die Punkte $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte von g^τ; der Punkt a ist der einzige Fixpunkt von g^1.

Beweis. Wir setzen $f'(a)=a$ und bezeichnen für jeden Punkt p aus $\overline{V}-a$ mit $f'(p)$ den Punkt

$$p+\tau(f\,v(p)-v(p)),$$

wobei $v(p)$ die Projektion von p auf $\overline{V}-V$ aus a bedeute und die Zahl τ durch $p=a+\tau(v(p)-a)$ bestimmt werde. Es sei

$$f^\tau(p)=(1-\tau)\,f(p)+\tau\,f'(p)$$

in allen (p,τ) mit $p\in\overline{V}$ und $0\leq\tau\leq 1$. Hierauf wende man Hilfssatz 2 auf $(f^\tau, 0\leq\tau\leq 1)$ an.

Hilfssatz 5. *Seien a, b Punkte aus V, c ein Punkt aus $\overline{V}-V$, α der Durchmesser von V, U die Menge aller Punkte p aus $\overline{V}-V$ mit $\varrho(p,c)<\alpha/2$. Sei A die Menge aller (p,τ), für die entweder $p\in\overline{V}$ und $\tau=0,1$ oder $p\in\overline{V}-U$ und $0\leq\tau\leq 1$. Bezeichne f eine stetige Abbildung von A in E, so daß $a=f(a,0)$, $b=f(b,1)$ und*

$$p\neq f(p,\tau)$$

in allen von $(a,0)$, $(b,1)$ verschiedenen (p,τ). Bedeute f^i für $i=0,1$ die durch $f^i(p)=f(p,i)$, $p\in\overline{V}$, bestimmte Abbildung. Der Index von a bei f^0 und der Index von b bei f^1 seien gleich. Dann gibt es von τ stetig abhängende Punkte a^τ, $0\leq\tau\leq 1$, aus V und eine Schar $(g^\tau, 0\leq\tau\leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E mit den Eigenschaften: in allen (p,τ) aus A ist $f(p,\tau)=g^\tau(p)$, in allen (p,τ) mit $p\in\overline{U}$ und $0\leq\tau\leq 1$ ist $p\neq g^\tau(p)$, es ist $a^0=a$ und $a^1=b$, für $0<\tau<1$ ist a^τ der einzige Fixpunkt von g^τ.

Beweis. Wegen Hilfssatz 2 genügt es, statt Hilfssatz 5 folgendes zu zeigen.

I. Ist W die Menge aller (p,τ) mit $p\in U$ und $0<\tau<1$, so gibt es eine stetige Abbildung h von $\overline{W}$ in E mit den Eigenschaften:

$$p \neq h(p, \tau) \text{ für } (p, \tau) \in \overline{W},$$

auf $\overline{W} - W$ stimmen die Abbildungen f und h überein.

Zum Beweis von I seien d der Mittelpunkt von V, X eine offene Vollkugel in E mit d als Mittelpunkt und $\overline{V} \subset X$, β der Durchmesser von X, V^τ für $0 < \tau < 1$ die offene Vollkugel in E mit d als Mittelpunkt und $(1 - \tau)\,\alpha + \tau\,\beta$ als Durchmesser. Ist p ein Punkt aus $\overline{X} - V$, so bedeute $v(p)$ die Projektion von p auf $\overline{V} - V$ aus d. Die Menge aller Punkte p aus V^τ mit $v(p) \in U$ heiße U^τ. Die abgeschlossene Menge

$$\overline{V} + \Sigma\,((\overline{V^\tau} - V^\tau) - U^\tau) + (\overline{X} - X)$$

werde auch A' genannt.

Dann wollen wir eine stetige Abbildung f' von A' in E erklären: Es sei $f'(p) = f(p)$ für $p \in \overline{V}$, weiter

$$f'(p) = p + (f(v(p), 1) - v(p)) \text{ für } p \in \overline{X} - X \tag{5}$$

sowie $f'(p) = p + (f(v(p), \tau) - v(p))$ in allen (p, τ) mit $p \in (\overline{V^\tau} - V^\tau) - U^\tau$ und $0 < \tau < 1$.

Bezeichnet W' die in E offene Menge $\overline{X} - A'$, so überlegt man sich leicht, daß es zum Beweis von I zu zeigen genügt:

II. Es gibt eine stetige Abbildung h' von $\overline{W'}$ in E, die keinen Fixpunkt hat und auf $\overline{W'} - W'$ mit f' übereinstimmt.

Beweis von II. Da $\overline{W'}$ zu der abgeschlossenen Hülle eines Simplexes homöomorph und $p \neq f'(p)$ in allen Punkten p aus $\overline{W'} - W'$ ist, gibt es einen Punkt e in W' und eine stetige Abbildung h^1 von $\overline{X}$ in E, die auf $\overline{X} - W'$ mit f' übereinstimmt und deren einziger in W' gelegener Fixpunkt der Punkt e ist.

Fixpunkte vom Index Null lassen sich beseitigen. Mithin braucht es nur noch den Nachweis, daß der Index von e bei h^1 Null: Sind Y eine in E offene Menge, γ eine stetige Abbildung von $\overline{Y}$ in E, hat γ auf $\overline{Y} - Y$ keinen Fixpunkt und auf Y höchstens endlich viele Fixpunkte, so bezeichne $\delta(\gamma, Y)$ die Indexsumme von γ auf Y.

Hierauf ist, da h^1 und f' auf $\overline{X} - X$ übereinstimmen, $\delta(h^1, X) = \delta(f', X)$, wegen (7) weiter

$$\delta(f', X) = \delta(f^1, V).$$

Die Zahl $\delta(f^1, V)$ und der Index von b bei f^1 sind gleich, der Index von b bei f^1 und der Index von a bei f^0 stimmen nach Voraussetzung überein, der letztere Index ist gleich $\delta(f^0, V)$, es gilt $\delta(f^0, V) = \delta(h^1, V)$. Mithin:

$$\delta(h^1, X) = \delta(h^1, V).$$

Da e der einzige Fixpunkt von h^1 auf $\overline{X} - V$, ergibt sich aus der letzten Gleichung bereits die obige Behauptung, womit Hilfssatz 5 bewiesen ist.

3. Sphärische Abbildungsscharen

Die beiden nachstehenden Bemerkungen ergeben sich fast unmittelbar aus den Überlegungen des vorigen Abschnittes. Aus den vier ersten Hilfssätzen folgt:

Bemerkung 1. Es seien E ein Euklidischer Raum mit dim $E > 1$, V eine offene Vollkugel in E und $a_1, \ldots, a_m$ paarweis verschiedene Punkte aus V, $m > 1$, b ein Punkt aus V, $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in E, $p \neq f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$), a_i die Fixpunkte von f^0, b der einzige Fixpunkt von f^1, *die Indexe von* a_1 *und* a_2 *bei* f^0 *entgegengesetzt gleich.* Dann gibt es einen Punkt c in V, von τ stetig abhängende Punkte

$$a_i^\tau (0 \leq \tau \leq 1/2), i \leq 2, \text{ und } a_i^\tau (0 \leq \tau \leq 1), i > 2,$$

aus V sowie eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E, über die gilt:
$a_i^0 = a_i$ *für alle* i, $a_i^{1/2} = c$ *für* $i \leq 2$, $a_i^1 = b$ *für* $i > 2$; *in allen* (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{V}$ *und* $\tau = 0, 1$ *oder* $p \in \overline{V} - V$ *und* $0 \leq \tau \leq 1$, *ist* $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; *für* $0 < \tau < 1/2$ *sind die Punkte* $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ *paarweis verschieden und die Fixpunkte von* g^τ; *die Punkte* $c, a_3^{1/2}, \ldots, a_m^{1/2}$ *sind die Fixpunkte von* $g^{1/2}$; *für* $1/2 < \tau < 1$ *sind die Punkte* $a_3^\tau, \ldots, a_m^\tau$ *paarweis verschieden und die Fixpunkte von* g^τ.

Aus Hilfssatz 2 und Hilfssatz 5 folgt:

Bemerkung 2. Es seien E ein Euklidischer Raum mit dim $E > 1$, V eine offene Vollkugel in E und $a_1, \ldots, a_m$ paarweis verschiedene Punkte aus V, ebenso $b_1, \ldots, b_n$ paarweis verschiedene Punkte aus V, $m > 1$ und $n > 1$, $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in E, $p \neq f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$, a_i die Fixpunkte von f^0, b_i die Fixpunkte von f^1, *der Index von* a_1 *bei* f^0 *und der Index von* b_1 *bei* f^1 *gleich.* Dann gibt es einen Punkt c in V, von τ stetig abhängende Punkte $a_1^\tau (0 \leq \tau \leq 1)$,

$$a_i^\tau (0 \leq \tau \leq 1/2), \; i > 1, \text{ und } b_i^\tau (1/2 \leq \tau \leq 1), i > 1,$$

aus V sowie eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von $\overline{V}$ in E, über die gilt:

$$a_i^0 = a_i \text{ für alle } i,\ a_i^{1/2} = c \text{ für } i > 1,\ b_i^{1/2} = c \text{ für } i > 1,$$

$$a_1^1 = b_1,\ b_i^1 = b_i \text{ für } i > 1;$$

in allen (p, τ), *für die entweder* $p \in \overline{V}$ *und* $\tau = 0, 1$ *oder* $p \in \overline{V} - V$ *und* $0 \leq \tau \leq 1$, *ist* $g^\tau(p) = f^\tau(p)$; *für* $0 < \tau < 1/2$ *sind die Punkte* $a_1^\tau, \ldots, a_m^\tau$ *paarweis verschieden und die Fixpunkte von* g^τ; *die Punkte* $a_1^{1/2} \neq c$ *sind die Fixpunkte von* $g^{1/2}$; *für* $1/2 < \tau < 1$ *sind die Punkte* $a_1^\tau, b_2^\tau, \ldots, b_n^\tau$ *paarweis verschieden und die Fixpunkte von* g^τ.

Seien alsdann P eine endliche Euklidische Mannigfaltigkeit in einem Euklidischen Raum, dim $P > 1$ und f, f' fixpunktfreie homotope Abbildungen von P in sich.

Sind F eine endliche Abbildungsschar in P, ferner $A = (a^\tau, \alpha_0 < < \tau < \alpha_1)$, $B = (b^\tau; \beta_0 < \tau < \beta_1)$ zwei Singularitäten von F und haben A, B wenigstens einen gemeinsamen Eckpunkt, so mögen A und B als „*gleichgerichtet*" bezeichnet werden, wenn die beiden offenen Intervalle (α_0, α_1) und (β_0, β_1) zueinander fremd sind. Seien C das singuläre Gebilde von F, D eine in C gelegene 1-Sphäre und $E_1, \ldots, E_m$ die in D liegenden Singularitäten von F. Für $i = 1, \ldots, m - 1$ mögen E_i und E_{i+1} einen gemeinsamen Eckpunkt haben. Dann wollen wir sagen, es sei „*der Grad von F längs D fast konstant*", wenn für $i = 1, \ldots, m - 1$ gilt: E_i und E_{i+1} haben gleichen oder entgegengesetzten Grad bei F, je nachdem sie gleichgerichtet sind oder nicht. Ist das singuläre Gebilde von F leer oder aus endlich vielen paarweis zueinander fremden 1-Sphären zusammengesetzt, so heiße F eine „*sphärische*" Deformation.

Hierauf gilt folgender schon eingangs ausgesprochene

Satz. *Es gibt eine* f *in* f' *überführende sphärische Deformation.*

Beweis. Wegen der obigen Bemerkungen genügt es zu zeigen, daß eine endliche Abbildungsschar F von f in f' und 1-Sphären $A_1, \ldots, A_m$ existieren mit den Eigenschaften: das singuläre Gebilde von F ist gleich ΣA_i, für $j \neq k$ besteht $A_j \,.\, A_k$ aus höchstens endlich vielen Punkten, längs eines jeden A_i ist der Grad von F fast konstant.

Seien nun G eine endliche Deformation von f in f' und A das singuläre Gebilde von G.

Wenn *erstens* eine Singularität B von G existiert, die einen freien Eckpunkt besitzt, so hat B bei G den Grad Null, wie schon in Abschnitt 1 bemerkt. Nach dem Zerlegungssatz aus Abschnitt 1 kann man B in zwei Singularitäten B_1 und B_2 aufspalten, deren jede den Grad Null hat. Bedeutet G_1 die dabei entstehende endliche Abbildungsschar, so stellt $\overline{B}_1 + \overline{B}_2$ eine 1-Sphäre dar, längs deren der Grad von G_1 fast konstant ist.

Zweitens liege der erste Fall nicht vor, und es sei C eine Singularität von G. Dann gibt es eine 1-Sphäre D in A, die C enthält. Sind $E_1, \ldots, E_n$ die von C verschiedenen in D liegenden Singularitäten von G, spaltet man die E_i mit Hilfe des Zerlegungssatzes in geeigneter Weise in je zwei Singularitäten E_{i_1}, E_{i_2} auf und ist G_2 die dabei entstehende endliche Abbildungsschar, so stellt $\overline{C} + \Sigma \overline{E}_{i_1}$ eine 1-Sphäre dar, längs deren der Grad von G_2 fast konstant ist.

Mit $\overline{A - B}$ beziehungsweise $\overline{(A - (\overline{C} + \Sigma \overline{E}_i))} + \Sigma \overline{E}_{i_2}$ verfahre man wie mit A. Dann ist, wenn r die Anzahl der Singularitäten von G, nach r Schritten eine Abbildungsschar F der verlangten Art gewonnen.

Buchbesprechungen

Ulisse Dini, Opere. Vol. 3. Herausgegeben von der Unione Matematica Italiana. 661 S. Roma: Editioni Cremonese. 1955. L. 6000.

Der dritte und letzte Band der Werke des Altmeisters der Analysis enthält seine Arbeiten über gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Die Arbeiten über gewöhnliche Differentialgleichungen sind in einer Einleitung von *G. Sansone* ausführlich erläutert und von *M. Picone* stammt eine entsprechende Erläuterung der Arbeiten *Dinis* über partielle Differentialgleichungen. Es ist nicht nur historisches Interesse, welches der heutige Mathematiker den Werken der Klassiker entgegenbringt, sondern er wird in der Art der Problemstellung und Arbeitsmethode dieser Meister auch viele Anregungen für sein eigenes Schaffen finden können. Es ist erstaunlich, wie viele Resultate z. B. über das asymptotische Verhalten der Lösungen linearer Differentialgleichungen, über die Differentialgleichungen der orthogonalen Polynome verschiedener Typen und Reihenentwicklungen nach solchen Polynomen, sowie z. B. über Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von *Dini* gefunden wurden.

Die Lektüre der Originalwerke großer Meister ist für jeden, der in den Geist der Mathematik eindringen will, unerläßlich, und so ist es sehr zu begrüßen, daß nun die gesammelten Abhandlungen dieses bedeutenden Analytikers einem weiten Kreise vollständig zugänglich sind. *K. Prachar*, Wien

Lebendige Mathematik. Von *W. Lietzmann*. Zweite Auflage. Mit 343 Textabb. und 10 Tafeln, 436 S. Würzburg: Physica Verlag. 1955. DM 16.80.

Wer dieses Buch zweifelnd zur Hand nimmt und meint, die Mathematik könne nicht „lebendig" sein, der braucht nur einen Blick in das Inhaltsverzeichnis oder in das Register zu werfen und er wird u. a. folgende Schlagwörter lesen: Biologische Verteilungskurven, Blattstellungen, Dioptrien, Schlösser und Schlüssel, Kartenspiel, vom Nähen, Häkeln, Stricken und Weben, Echolot, Ornamente, Triangulation, Fachwerk, Hyperbel und Rundfunk, das Hollerith-Verfahren usw. Daraus läßt sich die große Reichweite der mathematischen Anwendungen erkennen, auf die der Verfasser hinweist, um zu beweisen, daß wir in einer mathematischen Welt leben. Um diese Welt, in der Zahl und Gestalt ihr Wesen haben, verstehen zu können, ja, um in ihr leben zu können, bedarf es der „lebendigen" Mathematik. Der Verfasser führt seine Leser an Hand der Anwendungen im täglichen und tätigen Leben nicht auf dem vielleicht befürchteten trockenen Weg, sondern von der zugänglichsten Seite zur Mathematik, gibt damit auch einen Überblick über die Elementarmathematik und weist einen Weg zur Ausbildung des technisch-wissenschaftlichen Denkens. Das überaus reichhaltige Buch ist ohne mathematische Vorkenntnisse lesbar; es weist gefällige, gut ausgewählte und sauber gezeichnete Figuren auf und ist dem Fachmann wie dem Nichtfachmann wärmstens zu empfehlen. *J. Laub*, Wien

Ein System der negationslosen Logik mit ausschließlich realisierbaren Prädikaten. Von *V. Valpola*. (Acta Philosophica Fennica. Herausgegeben von der Societa Philosophica: IX.) 247 S. Helsinki. 1955.

Es geht dem Verfasser, der mehr von der analytischen Philosophie, als von der mathematisch-logisch orientierten Seite herkommt, um die „Darstellung der Erkenntnis": „Eine logistische Zeichensprache wird hier als ein Mittel für die Darstellung der Erkenntnis (des Erkenntnisinhaltes) betrachtet, als eine Sprache, in der man wenigstens den wichtigsten Teil der empirischen und der mathematischen Erkenntnis ausdrücken kann". Das System der klassischen Logik kommt für diesen Zweck nicht in Frage. Der Stein des Anstoßes ist natürlich die Implikation, welche schon oft zu Schwierigkeiten in der philosophischen Interpretation Anlaß gab. Der Verf. tut daher einen folgerichtigen Schritt, wenn er eine negationslose Logik aufbaut, in welcher die „Paradoxien der Implikation" verschwinden. *Griss* wird zitiert, der Aufbau des negationslosen Kalküls ist aber wohl von *Griss* unabhängig beschrieben. Der erste Teil, der wesentlich längere Teil der Arbeit, ist den philosophischen Erörterungen gewidmet, der zweite Teil bringt den axiomatischen Aufbau des Kalküls, der übrigens keinen selbständigen Satzkalkül enthält und der nur eine einzige Art von Variablen kennt, welche sowohl die Rolle der Individuen- als auch der Prädikatenvariablen spielen.

L. Schmetterer, Wien

Einführung in die operative Logik und Mathematik. Von *P. Lorenzen*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band LXXVIII.) Mit 1 Textabb., VII, 298 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 38.40, geb. DM 42.—.

Das Buch stellt im wesentlichen eine Zusammenfassung und Weiterführung der Ideen dar, die der Verfasser in einer Reihe von Arbeiten entwickelt hat und die den axiomatischen Aufbau der Mathematik durch einen „konstruktiven" ersetzen sollen. Aus terminologischen Gründen (Theorie der Rekursionen) wird hier an Stelle des Ausdruckes konstruktiv der Terminus „operativ" verwendet. Die Untersuchungen des Verfassers sind von der Idee beherrscht, daß die Beweisverfahren der Mathematik und der Metamathematik denselben Charakter tragen. Es ist daher nicht zweckmäßig, hier eine Trennung durchzuführen. Die Mathematik umfaßt mindestens die Theorie der Kalküle. Ein Kalkül ist aber keine axiomatische Disziplin, sondern „ein System von Regeln zum Operieren mit Figuren". Den „finiten" Standpunkt umgrenzt der Verf. durch die Forderung, daß die Aussagen „definit" sein sollen. Dadurch werden z. B. imprädikative Begriffsbildungen ausgeschlossen, die Quantoren jedoch nur in der Weise eingeschränkt, daß ausschließlich definite Argumentbereiche zugelassen werden. Im ersten Kapitel, Protologik betitelt, arbeitet der Verf. breiter und schärfer als er es in seiner Arbeit (1950) getan hat, eine Reihe von Prinzipien zur Gewinnung von zulässigen Regeln heraus. (Fügt man solche Regeln einem Kalkül hinzu, bleibt die Menge der ableitbaren Aussagen invariant): Deduktions-, Induktions-, Inversions-, Gleichheits- und Unableitbarkeitsprinzip. Das zweite Kapitel baut in enger Anlehnung an die erwähnte Arbeit die operative Logik auf, beginnt mit der Konsequenzenlogik, macht den Zusammenhang mit der Verbandstheorie deutlich und fügt endlich die Negation hinzu. Dies geschieht in einer Weise, welche im wesentlichen auf die intuitionistische Logik hinauskommt. Dieses Kapitel schließt mit einem Paragraph über Modalität und Wahrscheinlichkeit. Nun wird die Arithmetik aufgebaut, und dann folgt, wie mir

scheint, das Kernstück: die Einführung der Sprachschichten und der (gestuften) Analysis. Bekanntlich haben die im Umkreis dieser Untersuchungen liegenden Ideen des Verfassers ihre weitgehende Bedeutung für die Widerspruchsfreiheitsbeweise für Teile der (klassischen) Analysis erwiesen. Es werden hier zum Teil Gedanken von *Weyl* aufgenommen und ein gutes Stück weitergeführt und für konkrete Probleme der Analysis nutzbar gemacht (Begründung der Lebesgueschen Maßtheorie). Diese Untersuchungen betreffen die „konkrete Mathematik". Nun wendet sich der Verfasser der abstrakten Mathematik zu. An Strukturuntersuchungen (Algebra, Topologie) wird der Einbau der axiomatischen Methode in die hier vertretene Auffassung gezeigt. Dabei wird auch der Strukturbegriff im Rahmen dieser Auffassung präzisiert. Es ist begrüßenswert, daß die Untersuchungen des Verfassers nun in geschlossener Form vorliegen. Da es sich zeigt, daß der hier vorgeschlagene „halbintuitionistische" Weg viele traditionelle Schlüsse der Analysis nur wenig modifiziert, gewinnen diese Dinge auch für den nicht auf Grundlagenfragen spezialisierten Mathematiker erhöhtes Interesse.

L. Schmetterer, Wien

Mengenlehre. Von *E. Kamke*. Dritte, neubearbeitete Auflage. (Sammlung Göschen: Band 999/999a.) Mit 6 Textabb., 194 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1955. DM 4.80.

In der vorliegenden Neubearbeitung des bewährten Bändchens ist der Text der bisherigen Auflagen (man vgl. die Besprechungen in Band **37** und Band **55** der „Monatshefte") im allgemeinen wohl beibehalten worden, es wurden aber verschiedene Ergänzungen eingefügt — z. B. wird die Definition durch transfinite Induktion jetzt genauer behandelt — und vor allem wurden einige Abschnitte ganz neu aufgenommen. Neben Paragraphen über das Rechnen mit Mengen (mit einem Hinweis auf die Verbandstheorie), über Zerfällung und Zerlegung von Ordnungszahlen ist ein Kapitel über die Begründung der Mengenlehre dazugekommen, in dem auf die Bedeutung des Auswahlprinzipes hingewiesen wird und wo auch die intuitionistische Mengenlehre von *Brouwer* zur Sprache kommt; der Abschnitt über den Wohlordnungssatz ist unter Berücksichtigung moderner Arbeiten und Ergebnisse ganz neu geschrieben worden.

Man kann diesem wirklich preiswerten Buch mit vollem Recht eine weite Verbreitung wünschen.

W. Nöbauer, Wien

Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre. Von *A. A. Ljapunow*, *E. A. Stschegolkow* und *W. J. Arsenin*. (Mathematische Forschungsberichte: I.) 108 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 15.15.

Die deskriptische Mengenlehre beschäftigt sich mit den Eigenschaften gewisser Klassen von Teilmengen des Kontinuums und wurde in den letzten Jahrzehnten vor allem durch die Arbeiten von *Lusin* und seinen Schülern gefördert. Das vorliegende Buch ist die Übersetzung einer Artikelserie, die in russischer Sprache im Band 5 (1950) des Uspechi mat. Nauk erschienen ist und in welcher ein Teil der neueren Ergebnisse auf diesem Gebiet in lehrbuchartiger Darstellung entwickelt wird. Nach einer Einleitung (von *Ljapunow*) folgen Aufsätze über die Elemente der Theorie der B-Mengen (von *Stschegolkow*), die Theorie der A-Mengen (von *Arsenin* und *Ljapunow*) und die B-Funktionen (von *Ljapunow*).

Es ist zu begrüßen, daß dieser wichtige Forschungsbericht durch die Übersetzung jetzt auch dem des Russischen unkundigen Mathematiker zugänglich geworden ist.

W. Nöbauer, Wien

Matrizenrechnung. Von *W. Gröbner*. (Mathematische Einzelschriften: Band 4.) Mit 9 Textabb., 249 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 23.—.

Da die Matrizenrechnung heute eine grundlegende Disziplin geworden ist, so gibt es bereits mehrere Lehrbücher. Nichts destoweniger ist dieses Buch ob seines reichen Inhalts und seiner neuen Darstellung sehr willkommen. Das Buch ist dem Andenken von Prof. *Ph. Furtwängler* gewidmet, der Lehrer des Autors und des Rezensenten war. Gewiß erinnert vieles in dem Buch an die schönen Vorlesungen von *Furtwängler*, so besonders die Übermatrizen, die abgeleiteten Matrizen, die Äquivalenz und die Ähnlichkeit von Matrizen, doch ist das Buch weit darüber hinausgewachsen. Im Gegensatz zu den Vorlesungen *Furtwänglers* bildet das äußere Produkt nach den Graßmannschen Ideen den Ausgangspunkt. Aus dem Begriff und den Eigenschaften des äußeren Produktes wird die Determinantentheorie in überraschender Einfachheit entwickelt. Die Determinante einer quadratischen Matrix ist das äußere Produkt ihrer Zeilenvektoren. Daraus folgen mehrere Sätze, die unmittelbare Anwendungen der Sätze über das äußere Produkt sind. Das Buch ist ein vollständiges Lehrbuch der Matrizenrechnung und der Determinantentheorie. Es enthält zahlreiche geometrische Anwendungen (affine Geometrie, projektive Geometrie, Transformation auf Hauptachsen). Es behandelt das Eigenwertproblem, die Elementarteilertheorie, quadratische und Hermitesche Formen. Speziell führen wir an: die Frobeniusschen Kovarianten einer quadratischen Matrix, Basistransformationen des n-dimensionalen Vektorraumes, unimodulare Kongruenzen über einem Hauptidealring und automorphe Transformationen. Am Ende jedes Paragraphen stehen Ergänzungen und Aufgaben, die viele interessante Sätze enthalten.

An Vorkenntnissen werden nur die Grundbegriffe der Algebra vorausgesetzt. Um die Druckkosten zu verringern, wurde der Satz mit dem Varityper hergestellt. Dies schadet der Lesbarkeit nicht. Die Symbole für Vektoren und Matrizen sind nicht durch eine besondere Schriftgattung, sondern nur durch Fettdruck hervorgehoben, was heute vielfach geschieht, aber deshalb kaum nachahmenswert ist.

Zusammenfassend muß ich feststellen, daß das Buch ob seiner Klarheit, Strenge und seines reichen Inhalts ein besonders empfehlenswertes Lehrbuch der Matrizenrechnung und der Determinantentheorie ist. *N. Hofreiter*, Wien

Algebra. Von *B. L. van der Waerden*. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. II. Teil. Dritte Auflage der Modernen Algebra. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete: Band XXXIV.) VIII, 224 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 29.60.

Der zweite Teil enthält die Eliminationstheorie, die Idealtheorie, die Theorie der Algebren und die Darstellungstheorie der Gruppen. Da die zweite Auflage schon lange vergriffen ist, so ist es sehr wünschenswert, daß nun die dritte Auflage erschienen ist. Sie unterscheidet sich nur unwesentlich von den ersten zwei Auflagen. Besprechungen erfolgten in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **40**, 3 (1933) und **49**, 21 (1940). *N. Hofreiter*, Wien

Topological Transformation Groups. Von *D. Montgomery* und *L. Zippin*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Tract 1.) XI, 282 S. New York-London: Interscience Publishers. 1955. $ 5.50.

Seit dem Erscheinen des Buches von *Pontrjagin* über topologische Gruppen im Jahre 1939 wurden auf diesem Gebiet wieder viele Arbeiten geschrieben und

bemerkenswerte Fortschritte erzielt; es seien hier nur die Untersuchungen zum sogenannten Fünften Problem von *Hilbert* erwähnt. Ein wesentliches Verdienst an diesen Fortschritten kommt den beiden Verfassern dieses Buches zu, und es ist sehr zu begrüßen, daß die neuen Ergebnisse nun auch in Buchform dargestellt werden.

Es werden hier im ersten Kapitel in recht ausführlicher Darstellung die grundlegenden Begriffe und Sätze aus der Theorie der topologischen Räume und der topologischen Gruppen entwickelt und an zahlreichen, in den Text eingestreuten Beispielen verdeutlicht. Das zweite Kapitel bringt vor allem die bis etwa 1935 erzielten „klassischen" Ergebnisse über lokal kompakte topologische Gruppen. Die nächsten beiden Kapitel behandeln die seither gefundenen Methoden in der Theorie der lokal kompakten Gruppen und führen schließlich u. a. zu dem Beweis des Satzes, daß, grob gesprochen, jede lokal kompakte Gruppe durch eine *Lie*-Gruppe approximiert werden kann. Die beiden letzten Kapitel beschäftigten sich mit Transformationsgruppen von Räumen, insbesondere von Mannigfaltigkeiten.

Der Text ist flüssig und gut lesbar geschrieben. Für die ersten vier Kapitel werden vom Leser keine besonderen Vorkenntnisse verlangt, in den beiden restlichen Kapiteln hingegen werden auch nicht im Buch entwickelte Sätze, z. B. aus der Dimensionstheorie, verwendet. Man kann jedenfalls sagen, daß die Reihe der „Interscience Tracts" mit diesem ersten Band sehr verheißungsvoll begonnen hat.

W. Nöbauer, Wien

Rekursive Folgen. Von *A. I. Markuschewitsch.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band XI.) 48 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM. 2.80

Es wird bewiesen, daß folgende Folgen rekursive Folgen sind: die geometrischen Folgen, die arithmetischen Folgen, die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen, die Folge der Kuben der natürlichen Zahlen, die Ziffernfolge einer (gemischt)periodischen Dezimalzahl, die Folge der Koeffizienten des Quotienten zweier Polynome (wenn sich die Division unbegrenzt fortsetzen läßt) und schließlich die Folgen der Summen rekursiver Folgen. Es werden ferner Formeln abgeleitet, die es gestatten, jedes einzelne Glied einer rekursiven Folge zu berechnen, ohne alle vorhergehenden Glieder berechnen zu müssen.

J. Laub, Wien

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von *R. Courant.* Zweiter Band: Funktionen mehrerer Veränderlicher. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 110 Textabb., XI, 468 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 36.—.

Der zweite Band bringt die Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen. Genau so wie im ersten Band (siehe die Besprechung in Mh. Math. **59**, 337 (1955) werden die Probleme auch im zweiten Band ausgezeichnet herausgearbeitet. Die analytische Durchführung erfolgt in einer ausreichend exakten Darstellung. Besonders reichhaltig sind die Anwendungen auf Geometrie und Physik. Das letzte Kapitel ist ganz den Differentialgleichungen gewidmet. Die Hilfsmittel aus analytischer Geometrie und Vektorrechnung werden bereits im ersten Kapitel gebracht.

Die ersten beiden Auflagen erschienen 1928 und 1931. Eine ausführliche Besprechung erfolgte in dieser Zeitschrift Mh. Math. **37**, 9 (1930). Die dritte

Auflage bringt einige neue Zusätze, z. B. konforme Abbildung, Guldinsche Regel, Polarplanimeter, die Fresnelschen Integrale, das Fouriersche Integral, einige Sätze über lineare Differentialgleichungen, die Methode der Trennung der Variablen und einige Beispiele partieller Differentialgleichungen.

N. Hofreiter, Wien

H. v. Mangoldt's Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Seit der fünften Auflage neu herausgegeben und erweitert von *K. Knopp*. I. Band: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre. Zehnte, vollständig neubearbeitete Auflage. Mit 116 Textabb., XVI, 564 S. Leipzig: S. Hirzel. 1955. Geb. DM 22.—.

Schon durch Jahrzehnte sind die immer neuen Auflagen des „*Mangoldt-Knopp*" das beliebteste Lehrbuch zur Einführung in die höhere Mathematik gewesen, jeweils Meisterstücke der wissenschaftlichen Strenge wie der geschickten pädagogischen Darstellung; seit etwa 25 Jahren liegt die Herausgabe des Werkes in den bewährten Händen von *K. Knopp*. Nun erscheint der erste Band der zehnten Auflage, und zwar diesmal völlig neubearbeitet: ein Vergleich zeigt, mit welcher Sorgfalt immer wieder etwa noch nicht klar genug scheinende Stellen umgeschrieben wurden, während die Einteilung im Großen und natürlich auch oft genug der Text unverändert bleiben konnten. Etwas größere Änderungen erfuhr das Kapitel über die Grundlagen der Geometrie, wo nun ein axiomatischer Aufbau gegeben wird. Die Einführung wird ihre Beliebtheit sicher weiter bewahren, möge auch der Verf. noch lange sein ausgezeichnetes Werk betreuen!

H. Hornich, Graz

Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen. Von *A. I. Markuschewitsch*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 16.) VIII, 139 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 8.70.

Die Geschichte der Funktionentheorie ist in jeder Phase interessant: angefangen von den tastenden Versuchen um den Begriff der imaginären Zahlen bis zu ihrer Klärung durch *Euler* und *Gauß*, sodann der sytematische Aufbau der Theorie der analytischen Funktionen etwa bis *Riemann* und *Weierstraß* und darauf aufbauend die stürmische Entwicklung der letzten Jahrzehnte. Der Verf. kann in seinem sehr lebendig geschriebenen Buch begreiflicherweise nur eben „Skizzen" geben, besonders natürlich in dem letzteren Abschnitt. Der große Anteil, den die russischen Mathematiker auch an der Funktionentheorie haben, wird u. a. in eigenen Kapiteln über die Lobatschewskische Geometrie, über *Tschebyscheff*, sowie über die neueren Arbeiten der sowjetischen Mathematiker in der Funktionentheorie und den verwandten Gebieten gewürdigt.

H. Hornich, Graz

Übungsaufgaben zur höheren Mathematik. Von *R. Albrecht* und *H. Hochmuth*. Teil III. Mit 39 Textabb., 128 S. München: R. Oldenbourg. 1956. DM 9.80.

Der hier vorliegende dritte Teil der Übungsaufgaben gilt den Differentialgleichungen. Die Lösung einer Aufgabe wird immer unmittelbar nach der Aufgabe mit ausführlichem Lösungsgang gegeben. Mitunter und nicht systematisch werden auch allgemeine Lösungsregeln eingestreut. *H. Hornich*, Graz

Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument. Von *A. D. Myschkis*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 17.) Mit 9 Textabb., X, 181 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 21. 30.

Es handelt sich hier um Differentialgleichungen vom Typus $y'(x) = f(x, y(x - \alpha(x)))$, wo f und α vorgegebene Funktionen und $\alpha(x) \geqq 0$ ist. Diese Probleme, die für die Anwendungen (Regelung) eine große Rolle spielen, wurden in letzter Zeit besonders von russischen Mathematikern studiert und die Übersetzung dieses Buches ins Deutsche ist daher sehr zu begrüßen. Es werden hier die linearen Differentialgleichungen behandelt; für die Schwingung der Lösung und die Untersuchung der Stabilität werden speziell die Halbzyklen, d. s. die Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der Lösung untersucht. *H. Hornich*, Graz

Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Von *I. G. Petrowski*. Mit 19 Textabb., 296 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1955. DM 17.—.

In der naheliegenden Einteilung — Allgemeines und Cauchysches Problem, hyperbolische, elliptische und parabolische Differentialgleichungen — gibt der Autor über den üblichen Stoff hinaus vieles, was gerade von den russischen Mathematikern besonders untersucht worden ist. Nachdem z. B. beim Cauchyschen Problem es durchaus nicht immer der Fall ist, daß zu kleinen Änderungen der Anfangswerte auch kleine Änderungen der Lösung gehören, wird eine „korrekte Stellung" des Cauchyschen Problems verlangt: es werden nur solche Probleme behandelt, bei denen in einem gewissen Sinn eine stetige Abhängigkeit der Lösungsfunktion von den Anfangwerten besteht. Es ist dies eine sehr wesentliche Einschränkung, die aber nach Meinung des Verf. für alle physikalisch sinnvollen Probleme erfüllt ist. Ref. möchte hinzufügen, daß schon für die Lösbarkeit der linearen Differentialgleichungen (auch ohne Anfangsbedingungen) gewisse Voraussetzungen über die Koeffizienten notwendig sind, andernfalls überall unlösbare Fälle eintreten können. Im ganzen ist das Buch eine wertvolle Bereicherung der einschlägigen Lehrbuchliteratur und seine Übersetzung ins Deutsche ist sehr zu begrüßen. *H. Hornich*, Graz

Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Von *W. Schmeidler*. Band I: Lineare Integralgleichungen. Zweite, wenig veränderte Auflage. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A: Band 22.) XII, 611 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. 1955. DM 38.—.

Der hier vorliegende erste Band ist den linearen Integralgleichungen gewidmet. Die Gleichungen erster, zweiter und dritter Art werden, u. zw. auch in dieser Reihenfolge möglichst zusammenhängend und vollständig behandelt, wobei gerade die den Gleichungen erster Art gewidmete Theorie nahezu die Hälfte des Bandes einnimmt. Darüber hinaus wird das Werk zu einem Kompendium der Anwendungen dieser Theorie durch die vielen systematisch in den Text eingeordneten Beispiele, die am Ende des Buches nochmals zusammengestellt werden. Im Anhang werden die verschiedenen Integralbegriffe, die quadratisch integrablen Funktionen und die Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten gebracht. Die Aufgabe des Buches, eine zusammenfassende Darstellung vorerst der linearen Integralgleichungen zu geben, ist hier ausgezeichnet gelöst. *H. Hornich*, Graz

Praktische Mathematik mit besonderer Berücksichtigung von Statistik und Ausgleichsrechnung. Von *H. von Sanden*. Vierte, überarbeitete und erweiterte Auflage. (Teubners Mathematische Leitfäden: Band 44.) Mit 30 Textabb., 155 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1956. DM 7.60.

Die zweite und dritte Auflage wurden in dieser Zeitschrift Mh. Math. **56**, 83 (1952), **57**, 356 (1953) besprochen. Abgesehen von einigen kleinen Änderungen bringt die vierte Auflage erstmalig:

1. Das Verfahren von *Gräffe*. Es wird besonders dann angewandt, wenn eine algebraische Gleichung mindestens 2 Paare von komplexen Wurzeln hat.

2. Ein Kapitel über Nomographie. An Hand von einigen Beispielen wird die Methodik der Nomographie aufgezeigt und damit dem Leser ein erster Eindruck vermittelt.

3. Die quadratische Interpolation wird auch auf nicht äquidistant gegebene Funktionswerte ausgedehnt.

4. Die Approximation einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch ein Polynom wird durch eine neue Methode (Differentiation durch Integration) erweitert.

N. Hofreiter, Wien

Numerical Analysis. With Emphasis on the Application of Numerical Techniques to Problems of Infinitesimal-Calculus in Single Variable. Von *Zdeněk Kopal*. XIV, 556 S. London: Chapman and Hall. 1955. 63 s. net.

Das Buch ist ein umfangreiches Lehrbuch der praktischen Analysis, das nur geringe Kenntnisse aus der Algebra und der Differential- und Integralrechnung voraussetzt. Nicht behandelt werden: Näherungsweise Auflösung von Gleichungen, lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsrechnung, Funktionen mit mehreren Varuablen und daher auch keine partiellen Differentialgleichungen. Die folgenden Kapitel hingegen erfahren eine sehr gründliche Bearbeitung: Interpolation durch Polynome, numerische Differentiation, Anfangswertaufgaben von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Rekursionsformeln, um die numerischen Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen durch sukzessive Extrapolation zu finden, das Differenzenschemaverfahren), Rand- und Eigenwertaufgaben von gewöhnlichen Differentialgleichungen (algebraische Methoden, das Differenzenverfahren, Variationsmethoden, Methode von *Ritz*, iterative Methoden, Kollokationsmethode, Methode der kleinsten Quadrate), Numerische Integration (Mittelwertformeln, *Newton-Cotes* Quadraturformeln), Numerische Lösung von Integral- und Integrodifferentialgleichungen (algebraische Methoden, Ersetzung der Integralgleichungen durch ein System von algebraischen Gleichungen, Ersetzung von Integrodifferentialgleichungen durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, iterative Methoden, Kollokationsmethode, Fehlerquadratmethode). Das Buch enthält zahlreiche aus den Anwendungen (Technik, Physik, Astronomie) entnommene Beispiele, und das ist in einem Buch über praktische Analysis von besonderer Wichtigkeit, da der Leser sehen soll, wie sich die Methoden in der Praxis bewähren. Am Ende der Kapitel stehen ausführliche bibliographische Noten und einige Aufgaben. Die Darstellung st hervorragend.

N. Hofreiter, Wien

Darstellende Geometrie. Von *E. Salkowski*. Fünfte, verbesserte und ergänzte Auflage. Bearbeitet von *W. Schulze*. (Mathematik und ihre Anwendung in Physik und Technik. Reihe A: Band 3.) Mit 367 Textabb., X, 213 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. 1955. Geb. DM 9.50.

Die vorliegende von *W. Schulze* besorgte fünfte Auflage des Buches stellt von einigen wenigen Ergänzungen und stellenweisen Änderungen der Ausdrucksweise abgesehen, dem Wesen nach eine unveränderte Wiedergabe der noch von *Salkowski* besorgten zweiten Auflage dar.

An österreichischen Verhältnissen gemessen entspricht das Buch nach wie vor sowohl der Auswahl des Stoffes nach, als auch hinsichtlich der Darstellung der Materie etwa einem Leitfaden der darstellenden Geometrie für technische Mittelschulen. Die österreichischen Lehrbücher aus diesem Fach für Realschulen und Realgymnasien gehen über das hier Gebotene weit hinaus. Zum Gebrauche an österreichischen Technischen Hochschulen kommt das vorliegende Buch wohl kaum in Frage. Was einigermaßen überrascht, ist die vortreffliche Ausstattung des Buches. *L. Hofmann*, Wien

Einführung in die Geometrie der Waben. Von *W. Blaschke*. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus: Band IV.) Mit 42 Textabb., 108 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1955. sfr. 15.25.

Das Bändchen bringt in knapper und zugleich durchsichtiger Form den Kern der Ergebnisse aus einer Art Differentialgeometrie, die vom Verfasser zusammen mit zahlreichen Schülern und Mitarbeitern im Verlaufe der letzten 30 Jahre gewonnen wurden.

Unter Waben werden Systeme von Kurven- oder Flächenscharen mit gewissen Regularitätseigenschaften verstanden. Bei passend eingeengten topologischen Abbildungen geht im kleinen eine Wabe wieder in eine solche über, weshalb man im Sinne des Erlanger Programms nach topologischen Invarianten der Waben fragen wird. Dennoch steht die Herleitung von vollständigen Systemen von Differentialinvarianten im Mittelpunkt der Darstellung. Die geometrische Charakterisierung einer Wabe bezüglich der zugelassenen topologischen Abbildungen erfolgt durch Schließungseigenschaften, z. B. bei einer ebenen Dreierwabe, deren „Krümmung" verschwindet, dadurch, daß sich die Sechsecke aus Wabenkurven stets schließen. Ein weiterer Aufgabenkreis ist die Realisierung einer gegebenen Wabe durch eine möglichst einfache äquivalente. Dies führt insbesondere zur Frage, wann eine Wabe „streckbar" ist, d. h. sich in eine Wabe aus Geraden bzw. Ebenen überführen läßt.

Da der Gegenstand noch in reger Entwicklung ist, kann der Verfasser auf zahlreiche offene Probleme hinweisen, die „des Schweißes der Edlen wert sind". Die Bezeichnung „Wabe" ist an Stelle der ursprünglichen Bezeichnung „Gewebe" getreten. Es sei dahingestellt, ob der Umgang mit Bienen harmloser als der mit Webern ist. *K. Mayrhofer*, Wien

Elementary Topology. Von *D. W. Hall* und *G. L. Spencer*. Mit 26 Textabb., XII, 303 S. New York: J. Wiley and Sons. — London: Chapman and Hall. 1955. $ 7.—.

Die Topologie hat heute große Bedeutung für viele Teile der Mathematik gewonnen. Schon *Hilbert* sagte: „Aus dem Paradies, welches *Cantor* geschaffen hat, lassen wir uns nicht mehr vertreiben". Dieses mengentheoretische Paradies hat sich heute schon sehr ausgedehnt, und der junge Student der Mathematik sollte es möglichst bald kennen lernen (wenn auch dort nicht überall mehr paradiesische Zustände herrschen). Das vorliegende Buch soll dem Leser einen leichten Zugang hiezu bieten. Es beginnt mit einer Einführung in die Grundbegriffe der Mengenlehre und der Topologie der Zahlengeraden, welche äußerst

elementar gehalten ist. Dadurch wird das Verständnis für den Begriff des topologischen Raumes vorbereitet, mit dessen Eigenschaften sich das dritte Kapitel beschäftigt. Es folgt ein Kapitel über metrische Räume (zweites Abzählbarkeitsaxiom, Metrisierungssätze, Funktionenräume u. a.). Über „Bögen und Kurven" handelt ausführlich das fünfte Kapitel; hier finden sich z. B. der *Jordan*sche Kurvensatz, der Satz von *Hahn-Mazurkiewicz* sowie verschiedene speziellere Untersuchungen, z. B. über die Charakterisierung der einfach geschlossenen Flächen. Im Vorwort entschuldigen sich die Verfasser gleichsam wegen der großen Länge der Beweise in diesem Kapitel, stellen aber mit Recht fest, daß es besser ist, zuviel Einzelheiten zu bringen als zu wenig. Das folgende Kapitel bringt einiges über gewisse Zerlegungseigenschaften von Räumen, welche von *Bing* untersucht wurden. Das Buch schließt mit einer Behandlung der Probleme, welche sich aus dem Auswahlaxiom und dem Wohlordnungssatz ergeben. Über 400 Aufgaben erleichtern dem Leser das Eindringen in den Stoff. Die Darstellung ist sehr klar, ausführlich, mit großem pädagogischen Geschick durchgeführt und betont anspruchslos. Zahlreiche Literaturhinweise machen den Leser auf weitergehende Werke und Originalabhandlungen aufmerksam. Es ist dies eine sehr empfehlenswerte Einführung in die elementare Topologie, einer Wissenschaft, welche in so großem Maße eine Genauigkeit des Denkens erfordert.

K. Prachar, Wien

Theoretische Hydromechanik. Von *N. J. Kotschin*, *I. A. Kibel* und *N. W. Rose*. Aus dem Russischen übersetzt von *K. Krienes*. Band II. Mit 156 Textabb., VIII, 569 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955. DM 48.—.

Nach dem ersten wurde nun auch der zweite Band dieses groß angelegten Werkes ins Deutsche übersetzt. Er zerfällt in drei größere Kapitel: I. Theoretische Grundlagen der Gasdynamik; II. Bewegung zäher Flüssigkeiten; III. Elemente der Turbulenztheorie. Das zweite Kapitel wurde von *Kotschin*, die beiden anderen von *Kibel* verfaßt. Wir können nur kurz die in den einzelnen Kapiteln behandelten Gegenstände aufzählen. I. Gleichungen der Gasdynamik. Stationäre Bewegungen, ebenes und räumliches Problem. Instationäre Bewegungen. II. Gleichungen für die Bewegung zäher Flüssigkeiten. Exakte Lösung der Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit. Näherungslösungen der Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit für kleine *Reynolds*sche Zahlen. Näherungslösungen für große *Reynolds*sche Zahlen. III. Turbulenz und Instabilität. Ausgebildete Turbulenz. Zusatzspannungen, Mittelwerte der hydrodynamischen Größen. Ein im Original nicht enthaltener Anhang bringt einen Vergleich mit einer von *Ekman* stammenden Theorie der Meeresströmungen. Besonders sei noch auf die ausführliche Behandlung der Theorien von *Tschapligin* und *Christianowitsch* im Kap. I. und der *Prandtl*schen Grenzschichttheorie im Kap. II hingewiesen, sowie auf die Gründlichkeit, mit der die verschiedenen Näherungsmethoden zur Lösung der Bewegungsgleichungen behandelt werden. Die Verfasser „waren nicht nur bestrebt, den Leser mit diesem oder jenem Grundgedanken vertraut zu machen und ein ausführliches Literaturverzeichnis zu bringen, sondern auch in der Mehrzahl der Fälle die Technik der Lösung hydrodynamischer Probleme darzulegen". Deswegen ist die Darstellung sehr ausführlich gehalten und es werden oft zur Lösung desselben Problems mehrere Wege aufgezeigt. Besonders wertvoll ist hiebei die Berücksichtigung der neuesten russischen Literatur. Die Ausführlichkeit, Klarheit und Gründlichkeit, mit der der interessante Stoff auseinandergesetzt wird, machen das Werk zu einem vorbildlichen Lehrbuch, welches allen Interessenten nur wärmstens empfohlen

werden kann. (Das im Inhaltsverzeichnis für S. IX angekündigte Vorwort zur deutschen Ausgabe scheint versehentlich ausgelassen worden zu sein.)

K. Prachar, Wien

50 Jahre Grenzschichtforschung. Eine Festschrift in Originalbeiträgen. Herausgegeben von *H. Görtler* und *W. Tollmien*. Mit 236 Textabb., 499 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1955. DM 66.—.

Diese Festschrift ist ein würdiges Denkmal für *L. Prandtl*, den Begründer der Grenzschichttheorie. Eine Reihe von namhaften Gelehrten auf dem Gebiete der Grenzschichtforschung haben interessante Originalarbeiten geliefert. Es sind dies Forscher aus Deutschland, England, Frankreich, Holland, Italien, Japan, Schweden, der Türkei und den USA. Die Arbeiten zeigen, mit welchen Problemen man sich heute befaßt, lassen aber auch erkennen, daß noch viele Probleme in theoretischer und praktischer Hinsicht offen sind. In dem ersten Aufsatz gibt *W. Tollmien* einen Überblick über die Entwicklung der Grenzschichtforschung in den letzten 50 Jahren. Interessenten des Buches sind in erster Linie Wissenschaftler und Ingenieure, die sich mit Strömungsforschung und Luftfahrtforschung beschäftigen. Aber auch ein weiterer Kreis von Personen wird dieses Buch mit Interesse lesen und daraus Nutzen gewinnen. *N. Hofreiter*, Wien

Zur Ermittlung von Unterschallströmungen mit der Transformationsmethode bei quadratischer Approximation der Adiabate. Von *H. Schubert* und *E. Schinke*. (Berichte der sächsischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 101, Heft 6.) Mit 6 Textabb., 32 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955. DM 2.30.

Die Kontinuitätsgleichung für die Stromfunktion einer kompressiblen Unterschallströmung wird durch Übergang zur Hodographenebene auf die Schwingungsgleichung transformiert. Eine quadratische Approximation der Adiabate ermöglicht eine Reihenentwicklung der Stromfunktion nach Zylinderfunktionen. Die Strömung um ein kreisnahes Profil mit zwei Staupunkten wird für die Machzahl 0,3 durchgerechnet. *K. Prachar*, Wien

Théorème sur les surfaces d'onde en optique géométrique. Von *R. Damien*. 34 S. Paris: Verlag Gauthier-Villars. 1955. fr. 900.

Der Verf. geht von der folgenden Bemerkung aus: Wenn ein Strahlenbündel an einer Fläche gebrochen wird, so kann man zu der Kongruenz der gebrochenen Strahlen die Orthogonalfläche (Wellenfläche) h aufsuchen, die dem Lichtweg Null entspricht, wenn man den Lichtweg vom Scheitel 0 des Büschels aus mißt. Das „Théorème" besagt nun, daß bei einer Inversion an 0 g und h ihre Rolle vertauschen. Der Verf. gibt hiefür einen elementaren Beweis; man erkennt die Richtigkeit aber auch sehr einfach, wenn man den Übergang von g zu h als Berührungstransformation auffaßt und die Inversion auf deren Leitgleichung anwendet. Dieser Satz wird dann auf eine Reihe von Aufgaben der geometrischen Optik angewendet und führt zu eleganten Lösungen. *J. Radon*, Wien

Die Stabilität der versteiften Platten und Schalen. Von *J. R. M. Radok*. 47 S. Groningen-Djakarta: P. Noordhoff N. V. 1955. $ —.75.

Die vorliegende Arbeit gibt eine Diskussion des im Titel genannten Problemkreises (unter Beschränkung auf die Kreiszylinderschale). An Stelle der sonst

meist verwendeten Energiemethode wird die sogenannte Deformationsmethode benützt. Auf die einschlägige deutschsprachige Literatur wird nur in beschränktem Maße zurückgegriffen. *H. Parkus*, Wien

Probleme der Plastizitätstheorie. Von *W. Prager*. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften: Band 17.) Mit 52 Textabb., 100 S. Basel und Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1955. Geb. sfr. 12.50, DM 12.50.

Das vorliegende Buch des international bekannten Fachmannes auf dem Gebiete der Plastizitätstheorie umfaßt eine Reihe von besonderen Aufgaben dieses wichtigen Teilgebietes der Festigkeitslehre, und es ist aus der Niederschrift von Gastvorlesungen des Autors an der ETH Zürich entstanden.

Nach einem Überblick über das mechanische Verhalten plastischer Stoffe und aus ihnen hergestellter Tragwerke wird das Traglastverfahren und seine Bedeutung bei ebenen und räumlichen Spannungszuständen behandelt (Rahmentragwerke, Platten, Schalen). Der letzte Abschnitt ist den endlichen Verformungen bei ebenen Problemen gewidmet (Keil im plastischen Halbraum, ebenes Fließen eines gekerbten Zugstabes). Auf die Untersuchung der Stabilität im plastischen Bereich wurde aus bestimmten Gründen absichtlich verzichtet.

Wegen der strengen, prägnanten und dennoch kurzen Darstellungsweise ist das Studium dieses Werkes besonders jedem auf diesem Fachgebiet weniger Bewanderten sehr zu empfehlen, aber auch der Fachmann wird diese ausgewählten Kapitel als wertvolle Bereicherung der einschlägigen Literatur begrüßen. *K. Jäger*, Wien

Engineering Cybernetics. Von *H. S. Tsien*. XII, 289 S. New York-London-Toronto: McGraw-Hill Publishing Company. 1954. $ 6.50.

Das Buch studiert die Theorie von Kontrollsystemen, deren praktische Bedeutung stets anwächst (Servomechanismen, Regeltechnik). Die Ansprüche an die mathematischen Kenntnisse des Lesers sind nicht allzu hoch (Differentialgleichungen, Laplace-Transformation, Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere die Spektraltheorie zufälliger Funktionen und die Theorie der Filter von *Kolmogoroff* und *Wiener*). Die mathematischen Überlegungen treten überdies selten in reiner Gestalt auf, sondern sind in einer Sprache abgefaßt, die den Ingenieur anspricht. Nach Erklärung der einfachsten Begriffe (Eingang, Ausgang, Transformationsfunktion) werden einfache Rückführungssysteme behandelt. Die Differentialgleichungen werden in die Sprache der Laplace-Transformation übersetzt. Die Hauptschwierigkeit liegt darin, daß die Systeme nicht vollständig bekannt sind, sondern etwa nur der Eingang und Ausgang, aus denen auf die Transformationsfunktion zurückgeschlossen werden soll. Zur Bestimmung dieser Funktion wird die Methode von *Nyquist*, welche im wesentlichen auf dem Satz vom logarithmischen Residuum beruht und die Methode von *Evans* (Root-locus Methode) entwickelt. Von den vielen Verallgemeinerungen einfacher Rückführungssysteme heben wir besonders die linearen Systeme mit Zeitverzug hervor, deren praktische Bedeutung stets wächst. Als nächstes werden stochastische Differentialgleichungen behandelt, die sich ergeben, wenn die Eingangsfunktion eine stationäre zufällige Funktion ist. Vertrautheit mit der Spektraltheorie von *Chinčin* erleichtert die Lektüre. Ein Kapitel ist den Relaisservomechanismen gewidmet, und dann werden nichtlineare Systeme und lineare Systeme mit veränderlichen Koeffizienten untersucht, die besonders für ballistische und aerodynamische Probleme interessant sind. Die letzten Kapitel

beschäftigen sich mit dem Filtern von Störpegeln (*Wiener-Kolmogoroff* Theorie) und mit jenen Systemen, die fähig sind „zu lernen". Hier wird die Tendenz der kybernetischen Auffassung sichtbar, die Reizleitung im Nerv eines Organismus mit mechanischen Vorstellungen zu verknüpfen. Gewisse technische Kenntnisse vorausgesetzt, kann sich an Hand der Lektüre dieses Buches auch der mehr mathematisch interessierte Leser in diese aktuelle Materie einarbeiten.

L. Schmetterer, Wien

Control-System Dynamics. Von *W. R. Evans.* (McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series.) XIV, 282 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Publishing Company. 1954. $ 7.—.

Das vorliegende Buch deckt sich inhaltlich in vielem mit dem oben referierten Werk von *Tsien*. Es ist jedoch viel stärker auf die Praxis des Ingenieurs eingestellt. Die mathematischen Überlegungen bleiben im Hintergrund. Das Hauptinteresse gilt den praktischen Methoden: so nehmen die vom Verfasser geschaffene Methode und graphische Methoden einen breiten Raum ein. Systeme mit Zufallsstörungen oder vom Zufall gesteuerten Eingängen, deren mathematische Behandlung größere Schwierigkeiten verursacht, werden nicht behandelt. Für den Ingenieur, der sich in diese neuen Methoden einzuarbeiten wünscht, dürfte das die geeignete Darstellung sein. *L. Schmetterer*, Wien

Denkmaschinen. Von *L. Couffignal.* 186 S. Stuttgart: G. Kilpper Verlag. 1955. DM 10.80.

Aus dem Vorwort von *Max Bense:* „Nicht die Erfindung der Atombombe ist das entscheidende technische Ereignis unserer Epoche, sondern die Konstruktion der großen mathematischen Maschinen, die man, vielleicht mit einiger Übertreibung, gelegentlich auch Denkmaschinen genannt hat. Diese Feststellung begründet sich auf der Tatsache, daß die Technik mit ihnen einen neuen Aufgabenbereich, fast möchte man sagen: einen neuen Sinn gewonnen hat."

Inhaltsverzeichnis: Was ist eine Maschine?; Maschinen, die addieren und schreiben können; Maschinen, die lesen und auswählen können; Die universalen Rechenmaschinen; Die Analogie-Rechenmaschinen; Die Rechenmaschinen und der Nervenmechanismus; Die Mechanisierung der Logik; Das Problem des Denkens. Arbeitshypothesen und Arbeitsprogramm.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG/BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblattes für Mathematik"

herausgegeben von

L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner

Neue Folge

Erstes Heft: **Transfinite Zahlen.** Von **Heinz Bachmann.** VII, 204 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 29.80

Zweites Heft: **Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.** Von **Carlo Miranda.** VIII, 222 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 28.80

Drittes Heft: **Analytische Fortsetzung.** Von Professor Dr. **L. Bieberbach,** Berlin. Mit 2 Textabbildungen. IV, 168 Seiten. Gr.-8°. DM 24.80

Viertes Heft: **Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique.** Par **P. Samuel.** (Reihe: Algebraische Geometrie, besorgt von B. Segre.) IX, 133 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 23.60

Fünftes Heft: **La Géométrie des Groupes classiques.** Par **Jean Dieudonné.** (Reihe: Gruppentheorie, besorgt von R. Baer.) VII, 115 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 19.60

Sechstes Heft: **Algebraic Threefolds** with special Regard to Problems of Rationality. By Dr. **Leonard Roth,** London. (Reihe: Algebraische Geometrie, besorgt von B. Segre.) VIII, 142 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 19.80

Siebentes Heft: **Additive Zahlentheorie.** Von Professor Dr. **Hans-Heinrich Ostmann,** Berlin. I. Teil: Allgemeine Untersuchungen. VII, 233 Seiten. Gr.-8°. 1956. DM 29.80

Achtes Heft: **Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen.** Von Prof. Dr. **Hans Wittich,** Karlsruhe. Mit 31 Abbildungen. IV, 163 Seiten. Gr.-8°. 1955. DM 25.60

Die Abonnenten des „Zentralblattes für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Weitere Hefte befinden sich in Vorbereitung

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Soeben erschien:

Konstruktive Geometrie für Techniker

Von

Dr. Fritz Hohenberg

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz

Mit 432 Textabbildungen. IX, 272 Seiten. Gr.-8°. 1956

Steif geheftet S 117.—, DM 19.50, sfr. 20.—, $ 4.65

Ganzleinen S 132.—, DM 22.—, sfr. 22.60, $ 5.25

Das Buch ist eine Zusammenfassung der Vorlesungen „Darstellende Geometrie für Bauingenieure und Architekten" und „Darstellende Geometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker", die der Verfasser an der Technischen Hochschule in Graz hält. Es bietet die geometrischen Grundlagen des technischen Zeichnens. Mit einem geringen theoretischen Rüstzeug soll dem Techniker ein Optimum an praktischem Wissen und Können vermittelt werden. Auswahl und Darbietung des Stoffes richten sich nach technischen Bedürfnissen und Interessen. Zahlreiche moderne technische Anwendungen bauen dem Leser die Brücke von der Theorie zur Praxis und erhöhen den Wirkungsgrad des Studiums. So soll das Buch einen organischen Beitrag zum Werdegang des Ingenieurs oder Architekten geben. Der Aufbau des Buches ist elastisch genug, daß sich aus ihm einzelne Lehrgänge herausheben lassen, die verschiedenen technischen Studienrichtungen angepaßt sind. Das Buch wendet sich aber auch an den Mathematiker, vor allem an den Geometer, der sich für die technische Bedeutung und für die Anwendungen seiner Wissenschaft interessiert.
In Teil A werden Grund- und Aufriß, Axonometrie, Perspektive und Rekonstruktionen behandelt. Teil B bringt die Darstellung und konstruktive Behandlung von Drehflächen, Schraubflächen und anderen Flächen von technischer Bedeutung, sowie ein Kapitel über empirische Kurven und Flächen in kotierter Projektion. Teil C ist eine Einführung in die Geometrie der ebenen und räumlichen Getriebe und Verzahnungen.

Moderne algebraische Geometrie

Die idealtheoretischen Grundlagen

Von

Dr. Wolfgang Gröbner

o. Professor der Mathematik an der Universität Innsbruck

XII, 212 Seiten. Gr.-8°. 1949

Steif geheftet S 144.—, DM 23.90, sfr. 24.80, $ 5.70

Zu beziehen durch jede Buchhandlung